内 容 简 介

第一章　第 1 题　将军点兵算题是一个关于最小公倍数和集合的交集的综合应用题。同时也复习了同余的概念。

第 4 题　n 个元素的所有子集问题，是集合论的一个最基本的命题。

第 10 题　集合 R 和运算 ω 与集合 R^+ 和运算 ω' 是同构的。

第二章　第 1 题　从例题 $f(n)=1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$ 的方法，类推出

$$f(n)=1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

$$f(n)=1^5+2^5+\cdots\cdots+n^5=\frac{n^2(n+1)^2}{12}(2n^2+2n-1)$$

$$\begin{aligned}f(n)&=1^8+2^8+\cdots\cdots+n^8\\&=\frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{2}{3}n^7-\frac{7}{15}n^5+\frac{2}{9}n^3-\frac{1}{30}n\end{aligned}$$

但是一般的

$f(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots\cdots+n^k$ 的表达式

根据著名数学家波利亚用递归方法推得。这个方法首先是帕斯卡提出的，是二项式的重要应用。这就是重要的递归模型。

第 11 题，12 题，18 题　对多项式作辗转相除法确定 Sturm 序列，求多项式的实根的个数。

第三章　第 14 题，18 题　利用范德尔蒙行列式性质解题。

第四章　第 13 题，14 题，15 题　是用初等变换求逆阵。

第 16 题　用加边法求逆阵。

第五章　第 2 题　利用分块矩阵进行块运算和加边法。把矩阵 A 分解为下三角阵 L 和上三角阵 U 的乘积，其中 L 的对角线元素都为 1。

第 5 题　高斯消去法得到的三角分解 $A=LU$ 中递推公式 u_{ki}，l_{ik}，$a_{ki}^{(s)}$ 的推导。

第七章　第 5 题　在直角坐标系 x，y，z 下，弹性力学中的应力矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{pmatrix}$$

而在直角坐标系 x'，y'，z' 下的应力矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}\sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'}\\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'}\\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'}\end{pmatrix}$$

并且已知有 $B=T^{-1}AT$，这里 T 是坐标轴 x'，y'，z' 在 x，y，z 轴的方向余弦组成的可逆矩阵，证明

$$J_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$$

$$J_2=\sigma_x\sigma_y-\tau_{xy}^2+\sigma_x\sigma_z-\tau_{xz}^2+\sigma_y\sigma_z-\tau_{yz}^2$$

$$J_3=\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\,\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz}-\sigma_x\,\tau_{yz}^2-\sigma_y\,\tau_{xz}^2-\sigma_z\,\tau_{xy}^2$$

是直角坐标下的不变量。

本题通过二种方法证明。证明 1：由相似变换，矩阵 A 的特征值是不变量直接推得。证明 2：通过直接计算，逐项分类，排队，整理，得到同样的结论。这样可以加深对题目的理解和掌握。

第 10 题　用圆盘定理估计矩阵 A 的特征值的分布范围。

第 12 题　圆盘定理的推广。

第 13 题　确定矩阵的谱半径。

第 14 题　证明 Jacobi 矩阵是不可约的。

第八章 第 12 题 求一个酉矩阵，使矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

酉相似于上三角阵。

第九章 第 6 题 设 A 是实对称正定矩阵，证明

$$(AX,\ Y)\leqslant (AX,\ X)^{\frac{1}{2}}\ (AY,\ Y)^{\frac{1}{2}}$$

根据特征值，特征向量

$$X=\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2+\cdots+\alpha_n z_n$$

$$Y=\beta_1 z_1+\beta_2 z_2+\cdots+\beta_n z_n$$

$$AX=\alpha_1\lambda_1 z_1+\alpha_2\lambda_2 z_2+\cdots+\alpha_n\lambda_n z_n$$

$$AY=\beta_1\lambda_1 z_1+\beta_2\lambda_2 z_2+\cdots+\beta_n\lambda_n z_n$$

分别作乘法表

$$(AX,\ X)(AY,\ Y),$$

$$(AX,\ Y)^2$$

主对角线上元素全部消去。一般项化为

$$\alpha_i^2\beta_j^2\lambda_j\lambda_i X_i^2X_j^2+\alpha_j^2\beta_i^2\lambda_i\lambda_j X_i^2X_j^2-2\alpha_i\alpha_j\beta_i\beta_j\lambda_i\lambda_j X_i^2X_j^2=$$
$$\lambda_i\lambda_j X_i^2X_j^2\ (\alpha_i\beta_j-\alpha_j\beta_i)^2\geqslant 0$$

第十章 第 4 题 证明 1：通过求行列式因子，不变因子，确定初等因子组求出 Jordan 标准形。证明 2：通过求四级根向量，找到相似变换矩阵 T 的实践，巩固了对 Jordan 标准形理论的理解。

第 15 题 进一步强化求 j 级根向量，找相似变换矩阵 T 的方法。这是全书要求的最中心环节，也是三基训练的必然要求。

第十一章 第 4 题 对于 n 维向量空间的任何一种内积 $(x,\ y)$ 令

$$\|x\|=\sqrt{(x,\ x)}$$

证明 $\|x\|$ 是一种范数。

要验证它满足范数的三个条件：

（1）$X=0$，则 $\|X\|=0$

（2）$\|\alpha x\|=\sqrt{(\alpha x,\ \alpha x)}=\sqrt{\alpha^2\ (x,\ x)}=\alpha\sqrt{(x,\ x)}=\alpha\|x\|$

（3）我们要验证

$$\|X+Y\|\leqslant\|X\|+\|Y\|$$

由此推出只要

$$|(X,\ Y)|\leqslant\|X\|\ \|Y\|$$

$$(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2\leqslant(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)$$

两边分别作乘法表，两边主对角线的项对应相等，全部消去

$$2x_1x_2y_1y_2\leqslant x_2^2y_1^2+x_1^2y_2^2 \qquad 0\leqslant(x_1y_2-x_2y_1)^2$$

$$2x_1x_3y_1y_3\leqslant x_3^2y_1^2+x_1^2y_3^2 \qquad 0\leqslant(x_3y_1-x_1y_3)^2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$2x_{n-1}x_ny_{n-1}y_n\leqslant x_n^2y_{n-1}^2+x_{n-1}^2y_n^2$$

$$0\leqslant(x_ny_{n-1}-x_{n-1}y_n)^2$$

Cauchy-Schwarg 不等式得到了证明。

第 8 题　将行列式 $|A+\varepsilon B-\lambda I|$ 根据二进制的一一对应规则分解为 2^3 个行列式，如果是 n 阶行列式，就要分解成 2^n 个行列式。这样计算，既有条理、有秩序，又不会混乱、遗漏和重复。

第十二章　第 5 题，6 题，7 题，9 题，10 题　根据广义逆定义必须满足 Penrose 方程，即方程组（p_1）～（p_4）来做题。