第二章　极限与连续

微积分是研究变量以及变量函数关系的一门学科．极限概念是微积分的重要基本概念之一，微积分的其它重要概念如导数、微分、积分等都是用极限来表述的，并且它们的主要性质和法则也是通过极限方法推导出来的．本章将介绍极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质，为以后各章的学习做准备．

2.1　极限的概念

2.1.1　数列的极限

按一定次序排列的无穷多个数 a_1，a_2，$\cdots a_n$，$\cdots$称为无穷数列，简称数列．可简记为 $\{a_n\}$，其中的每个数称为数列的项，a_n 称为通项.

例： 数列 2，$\frac{1}{2}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\cdots$，$\frac{n+(-1)^n}{n}$，$\cdots$可以看出，该数列的值无限接近于常数 1.

【定义 1】 如果当 n 无限增大时，数列 $\{a_n\}$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 是数列 $\{a_n\}$ 的极限，或称数列$\{a_n\}$收敛于 A. 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$ 或 $a_n \to A\ (n\to\infty)$.

如果一个数列没有极限，就称该数列是发散的.

【例 1】 观察下面各数列的变化趋势，并写出它们的极限：

(1) $a_n=\frac{1}{n}$；(2) $a_n=2-\frac{1}{n^2}$；(3) $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$；(4) $a_n=5$

解： (1) 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$；

(2) 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)=2$；

(3) 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$；

(4) 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}5=5$.

由例 1 归纳出的一般结果如下：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0\ (\alpha>0)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\ (|q|<1)$；(3) $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$（$C$ 为常数）.

【例 2】观察数列的变化趋势，写出它们的极限.

（1）$a_n=3\times 2^{n-1}$；（2）$a_n=(-1)^{n+1}$.

解：（1）发散，无极限；

（2）发散，无极限.

2.1.2 函数的极限

数列可以看成是定义域为正整数集合的函数 $f(n)$，当自变量 n 从小到大取值时所对应的一列函数值就是数列的项，即 $a_n=f(n)$. 那么数列 $\{a_n\}$ 的极限为 A 就是：当自变量 n 取正整数且无限增大（即 $n\to\infty$）时，对应的函数值 $f(n)$ 无限接近于确定的数 A. 将数列极限概念中自变量 n 和函数值的 $f(x)$ 特殊性撇开，这样可以引出函数极限的一般概念.

1. 自变量趋向于无穷大时函数的极限

例：观察当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势，如图 2-1.

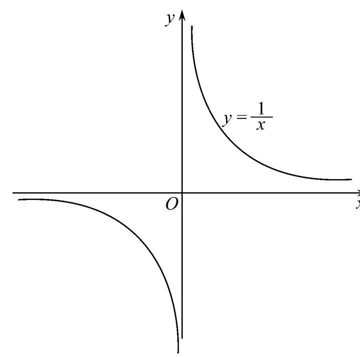

图 2-1

【定义 2】设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 充分大时有定义，如果当 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，则 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to\infty)$$

如果在上述定义中，限制 x 只取正值或只取负值，即有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时的极限. 注意到 $x\to\infty$ 意味着同时考虑当 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$.

那么有：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在且相等，则有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在且与它们相等. 当其中一个不存在、或都存在，但是不相等时，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在.

【定理 1】极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

【例 3】观察函数 $y=\arctan x$ 的图象，并求下列极限.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$；$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

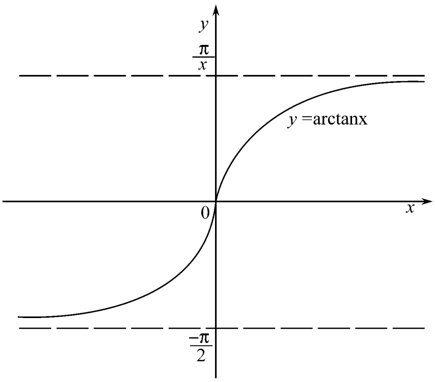

图 2-2

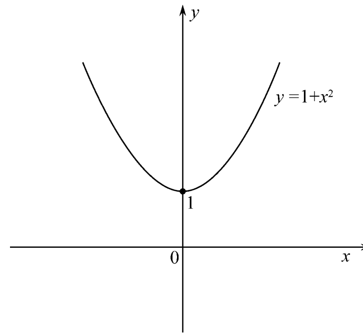

图 2-3

2. 自变量趋向于有限值时函数的极限

实例： 考察当 $x \to 0$ 时，$f(x)=1+x^2$ 的变化趋势.

【定义 3】 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义（x_0 可以除外），如果当 x 无限接近于定值 x_0，即 $x \to x_0$（x 不等于 x_0）时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，则 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A \quad (x \to x_0)$$

【例 4】 试根据定义说明下列结论：

（1）$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$；（2）$\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

解：（1）当自变量 $x \to x_0$ 时，显然，函数 $y = x$ 也趋近 x_0 故 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$；

（2）当自变量 $x \to x_0$ 时，函数 $y = C$ 始终取相同的值 C 故 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

当自变量 x 从 x_0 左侧（或右侧）趋近 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限（或右极限），记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) = A \text{ 或 } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0) = A.$$

【定理 2】 函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左、右极限都存在且相等。即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A.$$

【例 5】 通过观察正弦和余弦函数的图像考察极限 $\lim\limits_{x \to 0} \sin x$ 和 $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$ 的值.

$y = \sin x$　　　　　　　　　　$y = \cos x$

解： $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$；$\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

【例 6】 求函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

当 $x\to0$ 时的左、右极限值，并讨论极限 $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{sgn}x$ 是否存在.

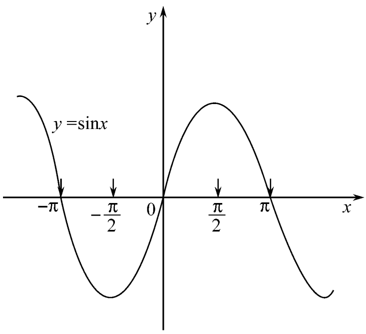

图 2-4

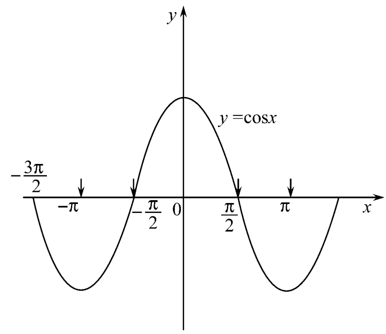

图 2-5

解：因为 $\lim\limits_{x\to0^-}\operatorname{sgn}x=-1$

$\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{sgn}x=1$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{sgn}x$ 不存在.

【例 7】 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$，当 $x\to0$ 时的极限.

解：因为 $x\to0$　且 $x\neq0$　因此有 $f(x)=\dfrac{x^2}{x}=x$，

于是 $$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0}x=0.$$

注意问题：例 7 中的函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$ 在 $x=0$ 处没有定义，但是函数在 $x=0$ 处有极限.

结论：函数在 $x=x_0$ 有无极限与该函数在该点有无定义没有关系。

2.1.3　极限的性质

【性质 1】（唯一性） 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则其极限是唯一的.

【性质 2】（有界性） 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 必在 x_0 的某个去心邻域内有界。

【性质 3】（保号性） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$（或 $A<0$）则存在点 x_0 的某一邻域，当 x 在该邻域内，但 $x\neq x_0$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）。

【推论 1】 如果 $f(x)\geqslant0$（或 $f(x)\leqslant0$），且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant0$（或 $A\leqslant0$）.

练习题 2.1

1. 选择题

(1) 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义，是 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 有极限的

(A) 必要条件；(B) 充分条件；(C) 充要条件；(D) 无关条件

(2) $f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 都存在是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有极限的

(A) 必要条件；(B) 充分条件；(C) 充要条件；(D) 无关条件

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ x-1, & x>1\end{cases}$，画出它的图象，并求当 $x\to1$ 时，函数的左右极限，从而说明当 $x\to1$ 时函数的极限是否存在.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1+2x, & x<0\\ 1 & x=0,\\ 1-x & x>0\end{cases}$ 求 $f(0+0)$，$f(0-0)$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ x^2+1, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x>1\end{cases}$ 求 $f(x)$ 在 $x\to0$ 及 $x\to1$ 时的左、右极限，并说明 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$、$\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 是否存在.

5. 观察函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 的图象，求出下列极限：

$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x$，$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot}x$。

2.2 无穷小与无穷大

2.2.1 无穷小

1. **定义 1** 极限是零的变量，称为无穷小量．简称无穷小.

例如：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小；又因为 $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$，所以函数 $g(x)=x-2$ 是当 $x\to2$ 时的无穷小.

注意：(1) 说一个函数 $f(x)$ 是无穷小时，必须指明自变量 x 的变化趋势．例如函数 $f(x)=x+5$ 是当 $x\to-5$ 时的无穷小，但当 $x\to1$ 时，$x+5$ 就不是无穷小.

(2) 不能把一个绝对值很小的常数说成是无穷小，因为这个常数的极限不等于 0.

(3) 常数函数 $f(x)=0$ 总是无穷小，因为 $\lim 0=0$.

2. 无穷小的性质

在自变量的同一变化过程中，无穷小具有如下性质：

【性质 1】 有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

【性质 2】 有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

【性质 3】 有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

【推论 1】 常数与无穷小的乘积仍是无穷小.

【例 1】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解： 考虑到$\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{x}\cdot\sin x$，当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$是无穷小，而 $\sin x$ 是有界函数，由性质 3 可得：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

3. 无穷小与函数极限之间的关系

【定理 1】 具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和；反之，如果函数可以表示为常数与无穷小之和，那么该常数就是这个函数的极限，即 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$. 其中 α 为 $x\to x_0(x\to\infty)$时的无穷小.

2.2.2　无穷大

1. 定义 2　如果当 $x\to x_0(x\to\infty)$时，函数 $f(x)$的绝对值无限增大，则函数 $f(x)$叫做当 $x\to x_0(x\to\infty)$时的无穷大量，简称无穷大.

一个函数 $f(x)$当 $x\to x_0(x\to\infty)$时为无穷大，按极限的意义，$f(x)$的极限是不存在的，为了描述函数的这一性态，我们也称函数 $f(x)$的极限是无穷大，并记为：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=-\infty$.

通常，还把趋向于 $+\infty$ 的叫做正无穷大，趋向 $-\infty$ 的叫做负无穷大，分别记为：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

例如，当 $x\to+\infty$ 时，$y=2^x$ 是正无穷大，当 $x\to0^+$ 时 $\ln x$ 是负无穷大，即有 $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$.

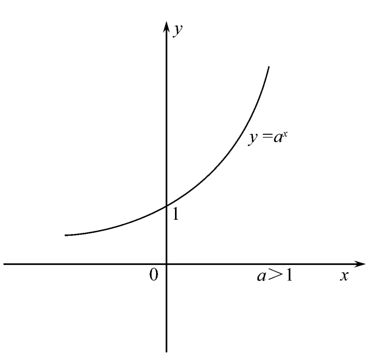

图 2-6

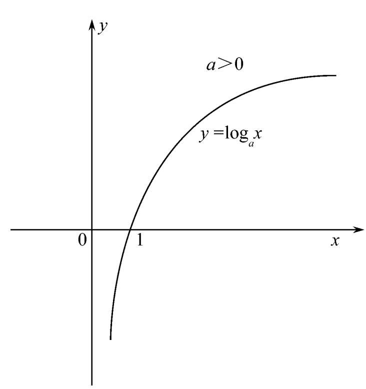

图 2-7

注意：（1）说一个函数 $f(x)$是无穷大，必须指明自变量 x 的变化趋势，如$\dfrac{1}{x}$

当 $x \to 0$ 时，是无穷大，但当 $x \to 1$ 就不是无穷大.

（2）不能把一个很大的常数说成是无穷大．因为这个常数当 $x \to x_0$ ($x \to \infty$)时，其绝对值不能无限地增大.

2. 无穷小与无穷大的关系

【定理 2】在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$，那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

例如：当 $x \to 0$ 时，x 是无穷小，所以 $x \to 0$ 时，$\frac{1}{x}$ 是无穷大.

当 $x \to +\infty$ 时，e^x 是无穷大，所以当 $x \to +\infty$ 时，e^{-x} 是无穷小.

2.2.3 无穷小的比较

【定义 3】设 α 和 β 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，又 $\lim \frac{\alpha}{\beta}$ 是在这一变化过程中的极限：

（1）如果 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$，就说 α 是比 β 高阶的无穷小；

（2）如果 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$，就说 α 是比 β 低阶的无穷小；

（3）如果 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = C$（$C$ 为不等于 0 的常数），就说 α 是与 β 同阶的无穷小；

（4）如果 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$，就说 α 与 β 等价无穷小；记作 $\alpha \sim \beta$.

【例 4】比较下列无穷小的阶数的高低：

（1）$x \to \infty$ 时，无穷小 $\frac{1}{x^2}$ 与 $\frac{3}{x}$；

（2）$x \to 1$ 时，无穷小 $1-x$ 与 $1-x^2$.

解：（1）因为 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x}} = \frac{1}{3} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$，所以 $\frac{1}{x^2}$ 是比 $\frac{3}{x}$ 高阶的无穷小；

（2）因为 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-x^2}{1-x} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(1+x)(1-x)}{1-x} = \lim\limits_{x \to 1}(x+1) = 2$；所以 $1-x$ 与 $1-x^2$ 同阶的无穷小.

练习题 2.2

1. 选择题

（1）若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$，下列极限正确的是　　（　　）

A. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\infty$；　　B. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\infty$；

C. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=0$；　　D. $\lim\limits_{x\to x_0}Cf(x)=\infty\ (C\neq 0)$.

（2）下列变量在给定的变化过程中不是无穷小的是　　（　　）

A. $n(x+1)(x\to -1)$；　　B. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}(x\to +\infty)$；

C. $\dfrac{x-2}{x^2-x-2}(x\to 2)$；　　D. $e^{\frac{1}{x}}(x\to 0^-)$.

2. 指出下列函数在自变量怎样变化时是无穷小？无穷大？

（1）$y=\dfrac{1}{x^3+1}$　　（2）$y=\dfrac{x}{x+5}$

（3）$y=\sin x$　　（4）$y=\ln x$

3. 比较下列无穷小的阶数的高低：

（1）当 $x\to 0$ 时，$5x^2$ 与 $3x$；（2）当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{5}{x^2}$与$\dfrac{4}{x^3}$.

2.3　极限运算法则

2.3.1　极限的四则运算法则

【定理1】设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

（2）$\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B=\lim f(x)\cdot g(x)$；

（3）$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\ (B\neq 0)$.

【推论1】若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，$C$为常数，则$\lim\limits_{x\to x_0}Cf(x)=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

【推论2】$\lim[{}_{x\to x_0}f(x)^n]=\left[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right]^n$.

【例1】求极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7+n^2}{n(n+1)}$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

解：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7+n^2}{n(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7+n^2}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{7}{n^2}+1}{1+\frac{1}{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=1.$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

【例 2】 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}(3x^2+2x-1)$；(2) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x+3}{x-2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$；(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$；

(5) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$；(6) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to1}(3x^2+2x-1)$

$$=\lim_{x\to1}3x^2+\lim_{x\to1}2x-\lim_{x\to1}1=3(\lim_{x\to1}x)^2+2\lim_{x\to1}x-1$$

$$=3+2-1=4$$

(2) $$\lim_{x\to5}\frac{x+3}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to5}(x+3)}{\lim\limits_{x\to5}(x-2)}=\frac{5+3}{5-2}=\frac{8}{3};$$

(3) $$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x(x+1)}=0;$$

(4) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1}=\frac{1}{4};$$

(5) $$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-1;$$

(6) $$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)=4.$$

【例 3】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{x^3+x^2-3}$.

解： $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{x^3+x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}\right)}=2.$$

【例 4】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+x^3-2}{4x^4+8x^3+9}$.

解： $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+8x^3+9}{x^5+x^3-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{9}{x^5}}{1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^5}}=0$$

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^3-2}{4x^4+8x^3+9}=\infty$.

综合上述两个例题，可以得到这样的结论：

$$a_0\neq0,\ b_0\neq0,\ m\in\mathbf{N}^+,\ n\in\mathbf{N}^+\text{时}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m\\ 0, & \text{当 } n>m\\ \infty, & \text{当 } n<m\end{cases}$$

2.3.2　复合函数的极限法则

【定理 2】设函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 满足条件：

（1）$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$；

（2）当 $x\neq x_0$ 时，$\varphi(x)\neq a$，且$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，

则复合函数$f[\varphi(x)]$当 $x\to x_0$ 时的极限存在，且

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A$$

结论：就是说，在上述条件下，求极限时可以换元.

【例 5】求极限$\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$.

解：设 $u=\sqrt[3]{x}$

则
$$\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\lim_{u\to2}\frac{u-2}{u^3-8}=\lim_{u\to2}\frac{u-2}{(u-2)(u^2+2u+4)}$$
$$=\lim_{u\to2}\frac{1}{u^2+2u=4}=\frac{1}{12}.$$

练习题 2.3

1. 求下列数列的极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n}{9n-2}$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+2\right)$.

2. 求下列各极限：

（1）$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+1)$；

（3）$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x-5}$；（4）$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

（5）$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+2x-4}{x^2+7}$；（6）$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-3x+7}{4x^3-x+5}$；

（7）$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin 2x}{x}$；（8）$\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\dfrac{1}{x}$；

（9）$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$；（10）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3, & x\leqslant 1,\\ x, & 1<x<2,\\ 2x-2, & x\geqslant 2\end{cases}$ 求：$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 3}f(x)$.

4. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=1$，试求 a 与 b 的值.

2.4 两个重要极限

2.4.1 重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

先可用计算器计算出当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的一系列取值，列成下表 2-1.

表 2-1

x	± 0.5	± 0.1	± 0.05	± 0.01	± 0.001	...	$\to 0$
$\dfrac{\sin x}{x}$	0.95885	0.99833	0.99958	0.99998	0.99999	...	$\to 1$

易知，当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\sin x}{x}\to 1$，

即
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

【例 1】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$.

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)=\dfrac{3}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=\dfrac{3}{2}$.

【例 2】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1.$

【例 3】求$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sin(x^2-9)}{x-3}$.

解：$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sin(x^2-9)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{\sin(x^2-9)\cdot(x+3)}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\frac{\sin(x^2-9)}{x^2-9}\cdot\lim\limits_{x\to3}(x+3)$ $=6.$

【例 4】求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}$.

解：令 $\arctan x=t$ 则 $x=\tan t$ 当 $x\to0$，$t\to0$ 时.

所以$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{t}{\tan t}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{t}{\sin t}\cdot\cos t\right)=1.$

【例 5】求$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}.\ \left(x.\sin\frac{1}{x}\right)=0.$

2.4.2 重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

下面我们利用计算器来进行计算，分两种情况列表显示．从而观察函数$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$的变化趋势.

当 $x\to-\infty$ 时，函数$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$的变化趋势．

表 2-2

x	-10	-100	-1000	-10000	-100000	...	$\to-\infty$
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.86797	2.73200	2.71964	2.71842	2.71830	...	$\to e$

当 $x\to+\infty$ 时，函数$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$的变化趋势．

表 2-3

x	10	100	1000	10000	100000	...	$\to+\infty$
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.59374	2.70481	2.71692	2.71815	2.71827	...	$\to e$

由表 2.2 和表 2.3 可以看出，当 $x\to\infty$ 时，函数$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$的对应值无限接

近于无理数 e（$e=2.7182818...$）

即
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

如果在上式中，令$\frac{1}{x}=t$，则 $x=\frac{1}{t}$，且 $x\to\infty$ 当 $t\to 0$ 时，于是有
$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$$

这个极限常用来求一些幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的极限，并且上式可以推广为 $\lim\limits_{f(x)\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}$.

【**例 6**】求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}$.

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$

【**例 7**】求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$.

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=\mathrm{e}^{3}$.

【**例 8**】求$\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$.

解： 设 $t=\tan x$，则当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$.

于是$\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$.

【**例 9**】求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x}$.

解：
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{3}}\right]^{3}\cdot\left(1+\frac{3}{x-1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{3}}\right]^{3}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-1}\right)=e^{3}\times 1=e^{3}$$

练习题 2.4

求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+2)\sin x}{x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{5x}}$；

（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{n}{n+4}\right)^{n}$；

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}$；

（8）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$；

（9）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{3x}$；　　　　（10）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$.

2.5　函数的连续性

2.5.1　函数的增量

当某一个变量 u 由初值 u_1 变到终值 u_2 时，u 的这两个值的差 u_2-u_1 就叫做变量 u 在 u_1 处的增量，记作 Δu. 即

$$\Delta u=u_2-u_1$$

【定义 1】设函数 $y=f(x)$ 在点及其近旁有意义，当自变量 x 从变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数 $y=f(x)$ 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，记 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，称 Δy 为函数的增量.

2.5.2　函数的连续性

1. 函数连续的定义

一般地，当 Δx 有变化时，函数的增量 Δy 也随着变动.

由图 2-8 可见，函数 $y=f(x)$ 的图像在 x_0 处是连续不断的，表现为 $\Delta x\to 0$ 时 $\Delta y\to 0$；而由图 2-9 可见，尽管 x 从的右侧趋近于 x_0，但 Δy 却不趋近于 0，从图可知，函数 $y=f(x)$的图像在处是不连续的.

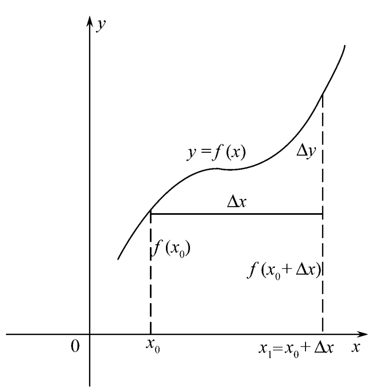

图 2-8

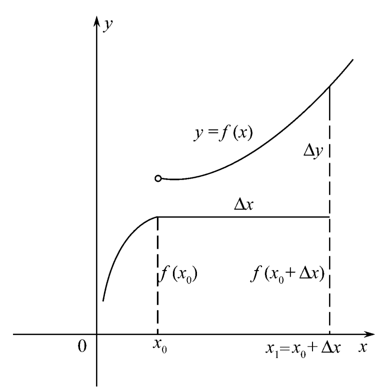

图 2-9

故关于函数在一点的连续性有如下的定义：

【定义 2】设函数 $y=f(x)$ 在点及其近旁有定义，如果当自变量 x 在处的增量趋近于零时，函数 $y=f(x)$ 相应的增量也趋近于零. 即

$$[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0.$$

那么就称函数 $y=f(x)$ 在点处是连续的，点称为函数 $y=f(x)$ 的连续点.

【例 1】证明函数 $y=x^2-1$ 在点 $x=1$ 处连续.

证明：因为函数的定义域为 R，所以函数在点 $x=1$ 及其近旁有意义．当自变量 x 在 $x=1$ 处有增量时，函数相应的增量为：

$$\Delta y=[(1+\Delta x)^2-1]-[1^2-1]=2\Delta x+(\Delta x)^2$$

所以函数在点 $x=1$ 处连续.

在定义 2 中，令 $\Delta x=0$，则有

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x_0)-f(x_0)$$

所以函数 $y=f(x)$ 在点处连续的定义又可叙述为：

【定义 3】设函数 $y=f(x)$ 在点及其近旁有定义，如果当时，函数 $y=f(x)$ 的极限存在，且等于函数在点的函数值，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

此定义指出了函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续必须满足三个条件：

（1）函数 $y=f(x)$ 在 x_0 及其近旁有意义；

（2）极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

（3）在点处极限值等于函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

2. 函数的间断点

【定义 4】如果函数 $y=f(x)$ 在点不连续，则点叫做函数 $y=f(x)$ 的不连续点或间断点.

例如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 无定义，所以函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处不连续．即 $x=0$ 是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的间断点.

又如：函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，在点 $x=0$ 的左右极限都存在但不相等，所以当 $x\to 0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的极限不存在，因此函数在点 $x=0$ 处不连续，即 $x=0$ 是函数的间断点.

再如：函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$，在 $x=1$ 的极限 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}f(x+1)=2$，但 $f(1)=0$，即 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\ f(x)\neq f(1)$，所以函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，即 $x=1$ 是函数的间断点.

通常我们把间断点划分为两类：

如果 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的间断点，但左右极限都存在，只是不相等，则 x_0 称为函数 $y=f(x)$ 的第一类间断点．其他情形的间断点都是第二类间断点，上面举例中的第一个函数中的 $x=0$ 是第二类间断点；第二个函数中的 $x=0$ 是第一类间断点；第三个函数中的 $x=1$ 是第二类间断点.

【例 2】设 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ \dfrac{\sin 2x}{x}, & x>0, \end{cases}$ 讨论函数 $y=f(x)$ 在 $x\to 0$ 时是否有极限，在 $x=0$ 处是否连续?

解： $y=f(x)$ 是分段函数，用左、右极限讨论.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)=2.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2x\cdot 2}{2x}=2.$

左右极限存在且相等，所以 $y=f(x)$ 在当时极限存在．但因 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2\neq f(0)$，所以函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

2.5.3　函数在区间上的连续性

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的每一点都连续，那么就称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续，区间 (a, b) 叫做函数 $y=f(x)$ 的连续区间.

如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有意义，在开区间 (a, b) 内连续，且满足 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$（此时称函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处右连续）和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)-f(b)$（此时称函数 $y=f(x)$ 在 $x=b$ 处左连续)，那么就称函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续．所有连续点构成的区间称为函数的连续区间．如 $y=\sin x$ 的连续区间是 $(-\infty, +\infty)$.

在几何上，连续函数的图象是一条连续不间断的曲线.

2.5.4　初等函数的连续性

由于基本初等函数的图象在其定义区间内都是连续不断的曲线，可知：基本初等函数在其定义区间内都是连续的.

根据连续函数的定义和极限的运算法则，可得下列连续函数的运算法则：

法则 1　设函数 $f(x)$，$g(x)$ 均在点处连续，那么 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ 也都在点 x_0 处连续.

法则 2　设函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 连续，又函数 $u=\theta(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $u_0=\theta(x_0)$，那么复合函数 $y=f[\theta(x)]$ 在处也连续.

以上两个法则同时也说明：一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

根据上面的法则和结论以及函数连续的定义可知：

(1) 初等函数在定义域内处的极限值就等于函数在处的函数值，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

(2) 求连续的复合函数的极限时，“$\lim\limits_{x\to x_0}$”与“f”可交换次序.

（3）连续函数求极限时，可作代换$\lim\limits_{x \to x_0} f[\theta(x)] = \lim\limits_{u \to \alpha} f(u)$，其中$u = \theta(x)$.

【例 3】求$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left[\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln = 1.$

【例 4】求$\lim\limits_{x \to 0} \cos(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解：$\lim\limits_{x \to 0} \cos(1+x)^{\frac{1}{x}} = \cos\left[\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \cos e.$

2.5.5 闭区间上连续函数的性质

1. 最大、最小值性质

【定理 1】设函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，那么$f(x)$在$[a, b]$上必有最大值和最小值.

如图 2-10 所示，函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，显然在ξ_1处，函数取得最大值；在点ξ_2处取得最小值.

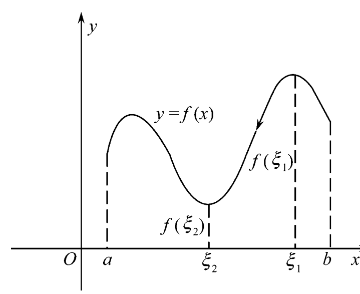

图 2-10

2. 介值定理

【定理 2】设函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号，那么在开区间(a, b)内至少存在一点ξ，使得$f(\xi) = 0$.

【例 5】证明方程$x^3 - 4x^2 + 1 = 0$在区间$(0, 1)$内至少有一个实根.

证：设$f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$，因为$f(x)$为初等函数，且在$[0, 1]$上有定义，所以在闭区间$[0, 1]$上有连续，又因为

$$f(0) = 1 > 0,\ f(1) = -2 < 0$$

所以根据根的存在定理可知，方程$x^3 - 4x^2 + 1 = 0$在区间$(0, 1)$内至少有一个实根.

练习题 2.5

1. 设函数$f(x) = \begin{cases} e^x + 2x^3 - x + 1, & x \neq 0 \\ K, & x = 0 \end{cases}$，在$(-\infty, +\infty)$内连续，则 k 值为（　　）

A. 0；B. 1；C. 2；D. 任意常数.

2. 设函数$f(x) = \begin{cases} 2x, & -1 < x < 2, \\ a, & x = 2, \\ x^2, & 2 < x < 4. \end{cases}$ 在$x = 2$处连续，则$a =$（　　）.

3. 求下列函数的间断点，并指出间断点的类型：

（1）$f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$；　　（2）$f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$；

（3）$f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$；　　（4）$f(x)\ \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$；

（5）$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 0\\ x-1, & x>0\end{cases}$；　　（6）$f(x)=\begin{cases}\cos x-1, & x\geqslant 0\\ \sin 2x+1, & x<0\end{cases}$.

4. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}e^{x2+3x-1}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-1}{2x+3}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2+x)-\ln 2}{x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$（提示：令 $t=e^x-1$）

5. 证明方程 $x^5-3x-1=1$ 在区间（1，2）内有一个实根.

6. 试证明方程 $x=a\sin x+b$（$a>0$，$b>o$）至少有一个正根，并且它不超过$a+b$.

本章小结

学习本章，要求读者理解熟悉数列极限和函数极限运算法则，掌握两个重要极限，理解无穷小与无穷大的概念，了解无穷小的性质，知道无穷小与无穷大之间的关系，理解函数的连续性概念，会求间断点，了解闭区间上连续函数的性质.

学习中应注意的问题

1. 复合函数的复合过程

首先要理解复合函数的定义，掌握基本初等函数及其定义域（见教材中附表），其次清楚究竟谁为自变量、中间变量、因变量.

2. 如何求极限

求极限是一元函数微积分中最基本的一种运算，其方法较多．主要有以下几种：

（1）利用极限的定义，通过函数图像，直观地求出其极限值；

（2）利用极限的运算法则；

（3）利用重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 和$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$；

（4）利用无穷小的性质；

（5）利用函数的连续性；

即 x_0 为函数的连续点时有$\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f\left[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\right]$.

3. 判断函数的连续性，找出间断点，其具体做法为：

（1）寻找使函数 $f(x)$ 没有定义的点 x_0，

（2）寻找使 $\lim f(x)$ 不存在的点 x_0，分段函数通常发生于分段点处；

（3）寻找使$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$点 x_0.

习题 2

1. 选择填空.

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x} = ($　　$)$.

A. 0；　　B. 1；　　C. 不存在；　　D. ∞.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$的值是(　　).

A. 1；　　B. ∞；　　C. 0；　　D. 不存在.

（3）当 $x\to 0$ 时，变量$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是(　　).

A. 无穷小；　　B. 有界的但非无穷小；

C. 无界的，但非无穷大；　　D. 无穷大

（4）下列各式不正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$；　　B. $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$；　　C. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$；　　D. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

（5）下列各式正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$；　　B. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{x} = e$；

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$；　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e$.

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x} = ($　　$)$.

A. 1；　　B. ∞；　　C. 不存在；　　D. 0.

（7）$f(x) = \begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin 3x, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，若使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，则$a = ($　　$)$.

A. 0；　　B. 1；　　C. $\dfrac{1}{3}$；　　D. 3

2. 求下列各极限：

（1）$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$；

（2）$\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$；

（6）$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$；

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$；

（8）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}}{x^2-1}$；

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2}$；

（10）$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{x-1}{x}}$.

3. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}2, & x=\pm 2\\ 4, & |x|>2\\ 4-x^2, & |x|<2\end{cases}$ 的连续性.

4. 证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.