

第 2 章 平面力系的合成与平衡

本章知识点

1. 力在坐标轴上的投影、合力投影定理
2. 力矩和力偶的概念、性质及定理
3. 平面汇交力系的合成与平衡条件
4. 平面平行力系的合成与平衡条件
5. 平面一般力系的简化、平衡条件及求解平衡问题的方法
6. 考虑摩擦时物体平衡问题的解法

先导案例

图 2-1 所示四杆机构, 通过哪些方法来确定 P 与 Q 之间应满足什么条件时, 杆 BC 处于平衡状态?

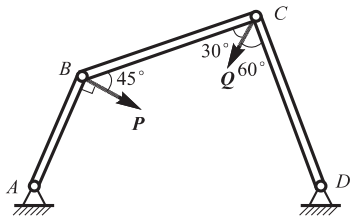


图 2-1 四杆机构

工程上, 为了研究问题的方便, 把许多力学问题根据力作用线的分布情况加以分类。若力系中各力的作用线在同一平面内, 该力系称为平面力系。由于结构与受力的平面对称性, 可将求解问题在对称平面内加以简化来处理 (图 2-2)。各力的作用线不在同一平面内的力系叫做空间力系。在实际问题中, 有些结构所受的作用力虽是空间力系, 但在一定条件下可简化为平面问题来处理。本章讨论刚体上平面力系的简化和平衡问题, 并介绍超静定问题的概念及有滑动摩擦时物体的平衡问题。

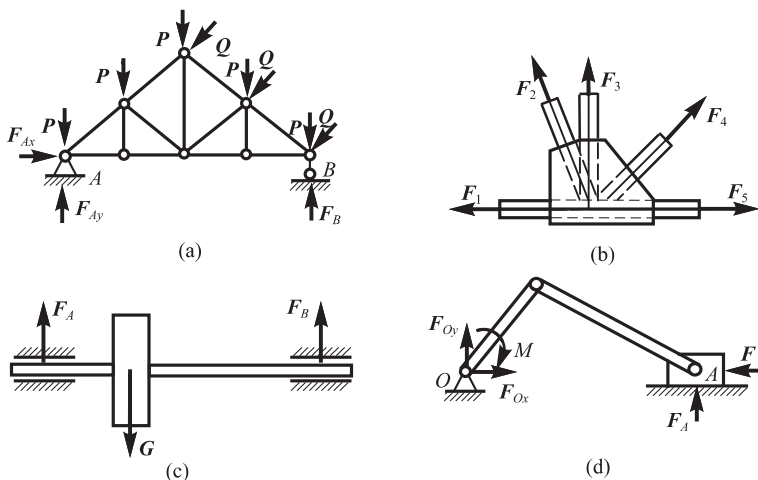


图 2-2 平面力系

2.1 平面汇交力系的合成与平衡

在平面力系中，如果各力的作用线都汇交于一点，这样的力系叫做平面汇交力系。

2.1.1 平面汇交力系合成的几何法

1. 两个汇交力系的合成（力三角形法）

设在刚体上作用有汇交于 A 点的两个力 F_1 , F_2 ，其合力 F_R 的大小与方向由力 F_1 , F_2 所构成的平行四边形的对角线来表示，合力 F_R 的作用点即为力 F_1 , F_2 的汇交点 A （图 2-3（a））。实际上，只要画出力的平行四边形的一半就能得到合力，可省略图 2-3（a）中的直线 AC 和 CD ，从留下的 $\triangle ABD$ 即可解得合力 F_R 的大小与方向，如图 2-3（b）所示。于是，可在 F_1 力的末端连上 F_2 ，再将 F_1 力的始端 A 与 F_2 力的末端相连，即 AD 为合力 F_R 。此法称为求两汇交力合力的三角形法则。合力 F_R 的矢量表达式为

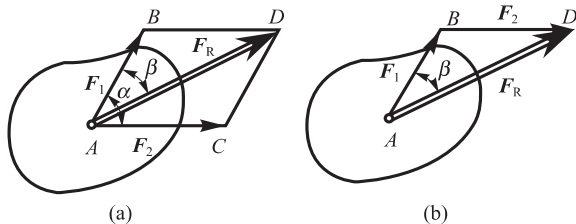


图 2-3 力三角形法则

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (2-1)$$

即两个汇交力的合力, 等于这两个力的矢量和。

2. 多个汇交力的合成 (力多边形法)

设在物体上的 O 点作用了一个平面汇交力系 F_1, F_2, F_3, F_4 , 如图 2-4 (a) 所示。要求这个汇交力系的合力时, 可以连续应用力三角形法则。如图 2-4 (b) 所示, 先求出 F_1 和 F_2 的合力 F_{R1} , 再求 F_{R1} 和 F_3 的合力 F_{R2} , 最后求出 F_{R2} 和 F_4 的合力 F_R 。力 F_R 就是原汇交力系的合力。实际作图时, 虚线所示的 F_{R1} 和 F_{R2} 可不必画出, 只要按一定的比例, 依次作直线 AB, BC, CD 和 DE 分别代表力 F_1, F_2, F_3, F_4 , 首端 A 和末端 E 的连线 AE 即代表合力 F_R 的大小和方向。合力的作用点仍是原汇交力系的交点 O 。多边形 $ABCDE$ 叫做力多边形, 这种求合力的方法叫做力多边形法则。简单地说, 力多边形的封闭边 (首尾的连线) 就代表原汇交力系的合力。

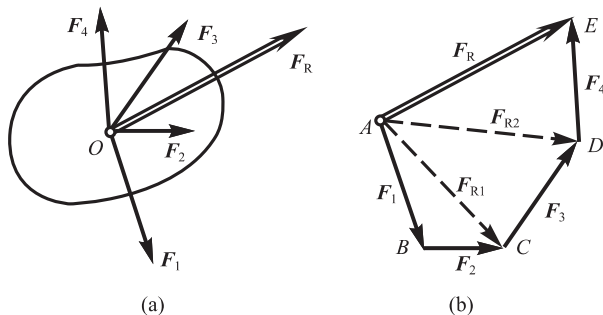


图 2-4 力多边形法则

应用力多边形法则求合力时, 如按不同顺序画各分力, 则力多边形的形状将不相同, 但力多边形的封闭边不变, 即合力的大小和方向不变。

力多边形法则可推广到任意个汇交力的情形, 可用公式表示为

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = \sum \mathbf{F} \quad (2-2)$$

即平面汇交力系合成的结果是一个力, 合力的大小和方向等于原力系中各力的矢量和, 其作用点是原汇交力系的交点。

2.1.2 平面汇交力系平衡的几何条件

平面汇交力系可合成为一合力 F_R , 即合力 F_R 与原力系等效。如果某平面汇交力系的力多边形首尾相重合, 即力多边形自行闭合, 则力系的合力 F_R 等于零, 物体处于平衡状态, 该力系为平衡力系。反之, 欲使平面汇交力系成为平衡力系, 必须使它的合力为零, 即力多边形必须闭合。所以, 平面汇交力系平衡的几何条件是: 力多边形自行闭合——原力系中各力画成一个首尾重合的封闭的力多边形, 此时, 力系的合力等于零。用公式可表示为

$$F_R = 0, \quad \text{或} \quad \sum F = 0 \quad (2-3)$$

如果已知物体在平面汇交力系作用下处于平衡状态,则可以应用平衡的几何条件,通过在物体上的已知力求出未知的约束力,但未知量的个数不能超过两个。

例 2.1 图 2-5 (a) 是起吊构件的示意图。构件自重 $G = 10 \text{ kN}$, 两钢绳与铅垂线的夹角均为 45° 。求当构件匀速起吊时, 两钢绳的拉力是多少? (在刚起吊时, 构件不是匀速运动, 绳受到的拉力大大超过本例的所得结果)

解: 对整个起吊系统来说, 是二力平衡问题。构件的重力 G 及拉力 T 构成平衡力系, $T = G = 10 \text{ kN}$ 。吊钩 O 受到三个汇交于 O 点的拉力 T , T_1 , T_2 作用且平衡, 可用平面汇交力系平衡的几何条件求解。这里 T_1 和 T_2 的方向是已知的, 而 T_1 和 T_2 的大小是两个未知数, 如图 2-5 (b) 所示。

作 $AB = T$, 过 A , B 分别作 T_1 和 T_2 的平行线相交于 C , 即得自行封闭的力 $\triangle ABC$ 。 BC 代表 T_2 的大小和方向; CA 代表 T_1 的大小和方向, 如图 2-5 (c) 所示。按比例量得

$$T_1 = T_2 = 7.07 \text{ kN}$$

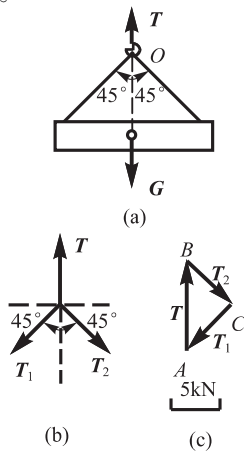


图 2-5 起吊构件

2.1.3 平面汇交力系合成的解析法

1. 力在坐标轴上的投影

平面汇交力系的几何法简捷且直观, 但其精确度较差。在力学计算中用得较多的还是解析法, 为此, 需要引入力在坐标轴上投影的概念。

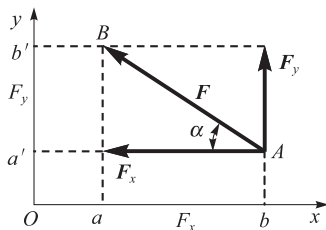


图 2-6 力 F 在坐标轴上的投影

力 F 在坐标轴上的投影定义为: 过力矢 F 两端向坐标轴引垂线 (图 2-6), 得垂足 a , b 和 a' , b' , 线段 ab , $a'b'$ 分别为力 F 在 x 轴和 y 轴上投影的大小。投影的正负号则规定为: 由起点 a 到终点 b (或由 a' 到 b') 的指向与坐标轴正向相同时为正, 反之为负。图 2-6 中力 F 在 x 轴和 y 轴的投影分别为

$$\begin{cases} F_x = -F \cos \alpha \\ F_y = F \sin \alpha \end{cases} \quad (2-4)$$

可见, 力的投影是代数量。

当力与坐标轴垂直时, 力在该轴上的投影为零; 当力与坐标轴平行时, 其投影的绝对值与该力的大小相等。

如果力 F 在坐标轴 x 和 y 上的投影 F_x 和 F_y 为已知, 则由图 2-6 中的几何关系, 可以

确定力 F 的大小及方向为

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \tan \alpha &= \left| \frac{F_y}{F_x} \right| \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

2. 合力投影定理

由式(2-5)可知,如能求出合力在直角坐标轴 x, y 上的投影,则合力的大小和方向即可以确定。为此,需讨论合力和它的分力在同一坐标轴上的投影关系。

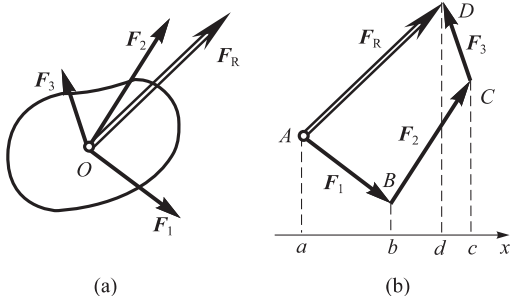


图 2-7 合力投影定理

设有一平面汇交力系 F_1, F_2, F_3 作用在物体的 O 点,如图 2-7(a) 所示。从 A 点开始作力多边形 $ABCD$, 则矢量 AD 表示该力系的合力 F_R 的大小和方向。在力系平面内任取一轴 x , 如图 2-7(b) 所示,将各力都投影到 x 轴上,并令 F_{1x}, F_{2x}, F_{3x} 和 F_{Rx} 分别表示各分力 F_1, F_2, F_3 和合力 F_R 在 x 轴上的投影,由图 2-7(b) 可得

$$\begin{aligned} F_{1x} &= ab, F_{2x} = bc, F_{3x} = -dc, F_{Rx} = ad \\ ad &= ab + bc - dc \end{aligned}$$

而
因此可得

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

这一关系可推广到任意多个汇交力的情况,即

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = \sum F_x \quad (2-6)$$

即合力在任一坐标轴上的投影,等于各分力在同一坐标轴上投影的代数和。这就是合力投影定理。

3. 平面汇交力系求合力的解析法

设在刚体上 A 点作用有平面汇交力系 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 。欲求此力系的合力时,应先选定坐标系 Oxy ,然后将力系中各力向坐标轴投影,得

$$\left. \begin{aligned} F_{Rx} &= \sum F_x \\ F_{Ry} &= \sum F_y \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

再按式(2-5)可算出合力 F_R 的大小和方向(图 2-7),此法称为求合力的解析法。

$$\left. \begin{aligned} F_R &= \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \\ \tan \alpha &= \left| \frac{\sum F_y}{\sum F_x} \right| \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

由以上的讨论可知,平面汇交力系合成的结果是一个合力。

2.1.4 平面汇交力系平衡的解析条件

从平面汇交力系平衡的几何条件得其平衡的必要且充分条件为:力系中各力在两个坐标轴上投影的代数和分别等于零。即

$$\left. \begin{aligned} F_{Rx} &= \sum F_x = 0 \\ F_{Ry} &= \sum F_y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

式(2-9)称为平面汇交力系的平衡方程,最多可求解包括力的大小和方向在内的两个未知量。

例 2.2 如图 2-8(a) 所示,已知定滑轮一端悬挂一物重 $G = 500 \text{ N}$,另一端施加一倾斜角为 30° 的拉力 F_T ,使物体 A 匀速上升。求定滑轮支座 O 处的约束力。

解: (1) 选滑轮与重物的组合体为研究对象,画受力图。

据三力平衡汇交定理,将支座约束力设为 F_R ,其方位角为 α ,如图 2-8(b) 所示,滑轮受平面汇交力系作用。

(2) 建立直角坐标系 Oxy ,列平衡方程并求解。

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, F_R \cos \alpha - F_T \cos 30^\circ = 0 \\ \sum F_y &= 0, F_R \sin \alpha - F_T \sin 30^\circ - G = 0 \end{aligned}$$

其中

$$G = F_T = 500 \text{ N}$$

解得

$$F_R = \sqrt{3}G = \sqrt{3} \times 500 \text{ N} = 866 \text{ N}$$

$$\tan \alpha = \frac{1 + \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = 1.732, \alpha = 60^\circ$$

因为 F_R 为正值,所以 F_R 的假设方向与实际方向一致,其与 x 轴的夹角为 60° 。

例 2.3 图 2-9(a) 所示为一夹具中的连杆增力机构,主动力 F 作用于 A 点,夹紧工件时连杆 AB 与水平线间的夹角 $\alpha = 15^\circ$ 。试求夹紧力 F_N 与主动力 F 的比值(摩擦不计)。

解: 分别取滑块 A, B 为研究对象,画受力图,如图 2-9(b), (c) 所示。两物体均受平面汇交力系作用,若求 F_N 与 F 的比值,可设 F 为已知,求出 F_N ,即可得到二者关系。

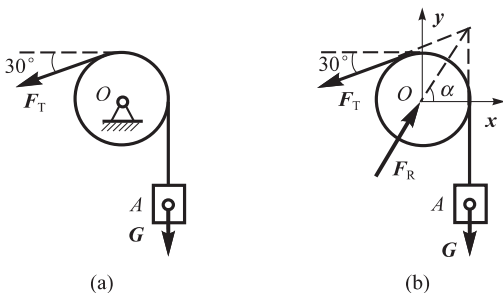


图 2-8 滑轮

对滑块 A

$$\sum F_y = 0, \quad -F + F_R \sin \alpha = 0$$

解得

$$F_R = F / \sin \alpha$$

对滑块 B

$$\sum F_x = 0, \quad F'_R \cos \alpha - F_N = 0$$

$$F'_R = F_R$$

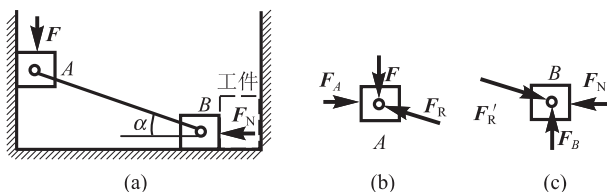


图 2-9 连杆增力机构

解得

$$F_N = F'_R \cos \alpha = F_R \cos \alpha = F \cot \alpha$$

于是

$$F_N / F = \cot \alpha = \cot 15^\circ = 3.73$$

分析讨论: 从 $F_N / F = \cot \alpha$ 的关系式可看出, 当 α 愈小时, 夹紧力与主动力的比值愈大。

2.2 力矩和力偶

2.2.1 力矩的概念及其计算

1. 力矩的概念

力不仅能使物体移动, 还能使物体转动。如图 2-10 所示, 用扳手转动螺母时, 作用于扳手 A 点的力 F 可使扳手与螺母一起绕螺母中心点 O 转动。由经验可知, 力的这种转动作用不仅与力的大小、方向有关, 还与转动中心至力的作用线的垂直距离 d 有关。因此, 定义 Fd 为力使物体对点 O 产生转动效应的度量, 称为力 F 对点 O 之矩, 简称力矩, 用 $M_O(F)$ 表示, 即

$$M_O(F) = \pm Fd \quad (2-10)$$

式(2-10)中, O 点称为力矩中心, 简称矩心; d 称为力臂; 乘积 Fd 称为力矩的大小; 符号“ $\pm$ ”表示力矩的转向, 规定在平面问题中, 逆时针转向的力矩取正号, 顺时针转向的力矩取负号。故平面上力对点之矩为代数量。

力矩的单位为牛·米($\text{N}\cdot\text{m}$), 符号 $\text{kN}\cdot\text{m}$ 表示千牛·米。

应当注意: 一般来说, 同一个力对不同点产生的力矩是不同的, 因此不指明矩心而求力矩是没有任何意义的。在表示力矩时, 必须标明矩心。

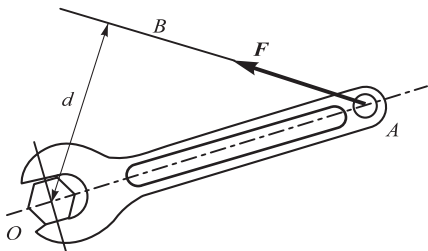


图 2-10 力对点之矩

2. 力矩的性质

从力矩的定义式(2-10)可知, 力矩有以下几个性质。

- (1) 力 F 对 O 点之矩不仅取决于 F 的大小, 同时还与矩心的位置即力臂 d 有关。
- (2) 力 F 对于任一点之矩, 不因该力的作用点沿其作用线的移动而改变。
- (3) 力的大小等于零或力的作用线通过矩心时, 力矩等于零。

显然, 互成平衡的两个力对于同一点之矩的代数和等于零。

3. 合力矩定理

若力 F_R 是平面汇交力系 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 的合力, 由于力 F_R 与力系等效, 则合力对任一点 O 之矩等于力系各分力对同一点之矩的代数和, 即

$$M_O(F_R) = M_O(F_1) + M_O(F_2) + \dots + M_O(F_n) = \sum M_O(F) \quad (2-11)$$

式(2-11)称为合力矩定理。

当力矩的力臂不易求出时, 常将力分解为两个易确定力臂的分力(通常是正交分解), 然后应用合力矩定理计算力矩。

例 2.4 如图 2-11 所示, 数值相同的三个力按不同方式分别施加在同一扳手的 A 端。若 $F=200\text{ N}$, 试求三种情况下力对点 O 之矩。

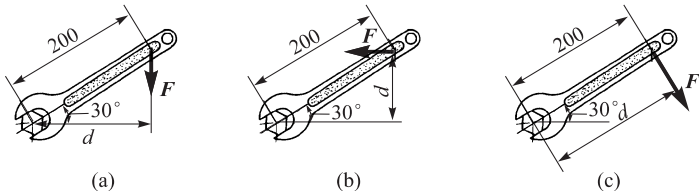


图 2-11 力臂对力矩的影响

解: 图 2-11 所示三种情况下, 虽然力的大小、作用点和矩心均相同, 但力的作用线各异, 致使力臂均不相同, 因而三种情况下, 力对点 O 之矩不同。根据力矩的定义式(2-10)

可求出力对点 O 之矩分别为

(1) 图 2-11 (a) 中

$$\begin{aligned} M_O(\boldsymbol{F}) &= -Fd = -200 \text{ N} \times 200 \times 10^{-3} \text{ m} \times \cos 30^\circ \\ &= -34.6 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

(2) 图 2-11 (b) 中

$$M_O(\boldsymbol{F}) = Fd = 200 \text{ N} \times 200 \times 10^{-3} \text{ m} \times \sin 30^\circ = 20.0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(3) 图 2-11 (c) 中

$$M_O(\boldsymbol{F}) = -Fd = -200 \text{ N} \times 200 \times 10^{-3} \text{ m} = -40.0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

由计算结果看出, 第三种情况 (力臂最大) 下力矩值为最大, 这与我们的实践是一致的。

例 2.5 试计算图 2-12 (a) 中的均布载荷 q 对 O 点之矩。(已知: $q = 1 \text{ kN/m}$, $l = 0.5 \text{ m}$)

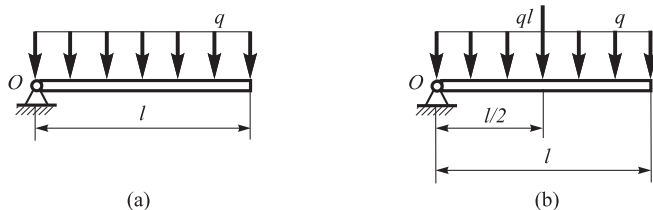


图 2-12 均布载荷 q 对 O 点之矩

解: 本题应用合力矩定理计算, 能非常方便地得到所要求的结果。

均布载荷的合力大小为 ql , 合力到 O 点的距离为 $l/2$ (图 2-12 (b)), 因此, 均布载荷 q 对 O 点之矩为

$$M_O(\boldsymbol{q}) = ql \cdot \frac{l}{2} = 1 \text{ kN/m} \times 0.5 \text{ m} \times \frac{0.5 \text{ m}}{2} = 0.125 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

2.2.2 力偶的概念及其性质

1. 力偶的概念

在生活和生产实践中, 经常遇到某些物体同时受到大小相等、方向相反、不共线的两个平行力所组成的力系使物体产生转动效应的情况。例如: 司机用双手转动方向盘的作用力 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'$ (图 2-13 (a), (b)); 人用手拧水龙头时, 作用在开关上的两个力 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'$ (图 2-13 (c), (d))。这一对等值、反向、不共线的平行力, 称为力偶, 并用符号 $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}')$ 表示。由于力偶不可能合成为更简单的形式, 所以力偶和力都是组成力系的基本元素。

力对刚体的运动效应有两种: 移动和转动, 但力偶对刚体的作用效应仅仅是使其产生转动。

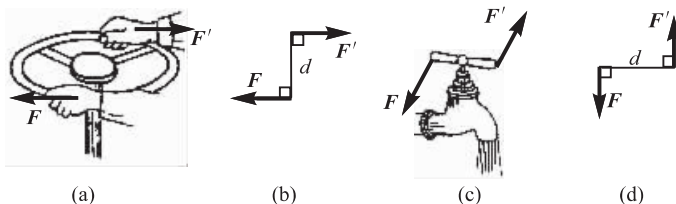


图 2-13 力偶示意图

力偶的两力作用线所决定的平面称为力偶的作用面，两力作用线间的垂直距离 d 称为力偶臂。力学中，用力偶的任一力的大小 F 与力偶臂 d 的乘积再冠以相应的正负号，作为力偶在其作用面内使物体产生转动效应的度量，称为力偶矩，记作 $M(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$ 或 M 。即

$$M(\mathbf{F}, \mathbf{F}') = M = \pm Fd \quad (2-12)$$

式 (2-12) 中，符号“ $\pm$ ”表示力偶的转向，一般规定，力偶逆时针转动时取正号，顺时针转动时取负号。力偶矩的单位为 $\text{N} \cdot \text{m}$ ，也可用 $\text{kN} \cdot \text{m}$ 表示。

2. 力偶的基本性质

性质 1 力偶无合力，所以不能用一个力来代替。力对物体有移动和转动效应；力偶对物体却只有转动效应。图 2-14 所示为板分别受到力和力偶作用时的运动情况。

性质 2 力偶对于其作用面内任意一点之矩与该点（矩心）的位置无关，它恒等于力偶矩。如图 2-15 所示，已知力偶 $(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$ 的力偶矩为 $M = Fd$ ，在其作用面内任意取点 O 作为矩心，设点 O 到力 $\mathbf{F}'$ 的垂直距离为 x ，则力偶 $(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$ 对点 O 之矩为

$$M_O(\mathbf{F}) + M_O(\mathbf{F}') = F(x + d) - F'x = Fd$$

此值等于力偶矩。在计算结果中不包含 x 值，可见力偶对平面内的任一点的矩，与矩心的位置无关。

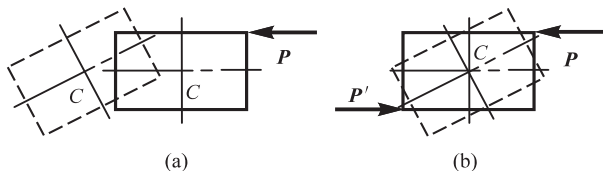


图 2-14 物体受一力与受一力偶作用的比较

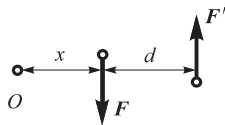


图 2-15 力偶矩与矩心无关

性质 3 在同一平面内的两个力偶，如果它们的力偶矩大小相等、转向相同，则这两个力偶是等效的，这叫做力偶的等效性。

力偶的这一性质已为实践所证实。根据力偶的等效性，可得出如下两个推论。

推论 1 力偶可在其作用面内任意移动和转动，而不改变它对物体的转动效应。即力偶

对物体的转动效应与它在作用面内的位置无关。

例如司机操纵方向盘时, 不管手放在 1-1 位置或 2-2 位置, 因此时的力偶臂不变, 只要力的大小不变, 转动效果就一样 (图 2-16)。

推论 2 只要力偶矩的大小不变, 转向不变, 可以相应地改变组成力偶的力的大小和力偶臂的长短, 而不改变它对物体产生的转动效应。

在研究力偶的转动效应时, 只需考虑力偶矩的大小和转向, 而不必追究其在作用面内的位置、组成力偶的力的大小以及力偶臂的长短。因此在工程中可用一段带箭头的弧线来表示力偶, 箭头表示转向, M 表示力偶矩的大小 (图 2-17)。

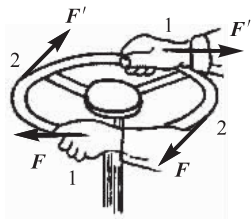


图 2-16 操作方向盘

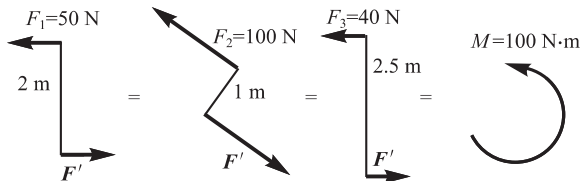


图 2-17 力偶的等效性

性质 4 力偶在任意轴上的投影等于零。因为组成力偶的两个力大小相等、方向相反, 所以这个结论成立。

2.2.3 平面力偶系的合成及平衡

1. 平面力偶系的合成

平面力偶系合成的结果为一合力偶, 合力偶矩等于各分力偶矩的代数和。即

$$M_R = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M \quad (2-13)$$

证明：如图 2-18 (a) 所示, 设在刚体某平面上作用力偶系 $M_1, M_2, \cdots, M_n$, 在力偶作用面内任选两点 A, B 并连线, 以 $\overline{AB} = d$ 作为公共力偶臂, 保持各力偶的力偶矩不变, 将各力偶分别表示成作用在 A, B 两点的反向平行力 (图 2-18 (b)), 则有

$$F_1 = \frac{M_1}{d}, F_2 = \frac{M_2}{d}, \cdots, F_n = \frac{M_n}{d}$$

于是在 A, B 两点处各得一组共线力系, 其合力分别为 F_R 和 F'_R (图 2-18 (c)), 且有

$$F_R = F'_R = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum F$$

F_R 和 F'_R 为一对等值、反向、不共线的平行力, 它们组成的力偶即为合力偶, 所以有

$$M = F_R d = (F_1 + F_2 + \cdots + F_n) d = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M_i$$

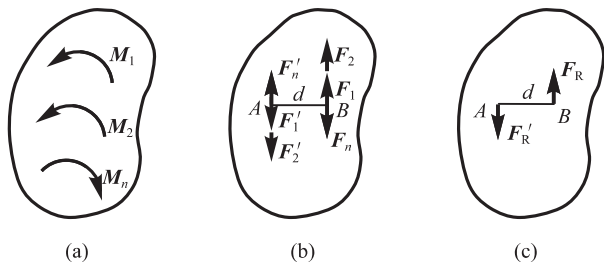


图 2-18 力偶的合成

2. 平面力偶系的平衡

按式(2-13), 平面力偶系简化结果为一合力偶, 所以平面力偶系平衡的充要条件为: 力偶系中各力偶矩的代数和等于零。即

$$M = \sum M_i = 0 \quad (2-14)$$

式(2-14)称为平面力偶系的平衡方程, 此方程只能求解 1 个未知量。

例 2.6 梁 AB 上作用一个力偶, 其力偶矩 $M = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 力偶转向如图 2-19 (a) 所示。若梁长 $l = 5 \text{ m}$, 重量不计, 试求 A 、 B 支座的反力。

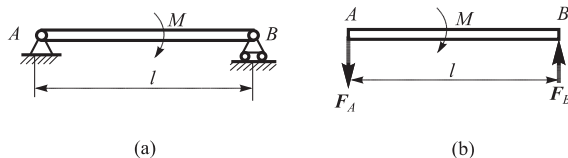


图 2-19 简支梁

解: 取梁 AB 为研究对象。由两端支座的性质, 知 F_B 的方位铅直, 而 F_A 的方位不定。但梁上载荷只有一个力偶, 而力偶只能与力偶平衡。所以 F_A 与 F_B 必组成一个力偶, 即 F_A 与 F_B 大小相等, 作用线平行, 设其指向如图 2-19 (b) 所示。由平面力偶系的平衡条件有

$$\begin{aligned} \sum M_i &= 0, -M + F_A l = 0 \\ F_A &= \frac{M}{l} = \frac{100 \text{ kN} \cdot \text{m}}{5 \text{ m}} = 20 \text{ kN} \\ F_B &= 20 \text{ kN} \end{aligned}$$

例 2.7 丁字横梁由固定铰 A 及链杆 CD 支持, 如图 2-20 (a) 所示。在 AB 杆的 B 端有一个力偶作用, 其力偶矩 $M = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$, 转向如图 2-20 所示。若各杆自重不计, 试求 A 、 D 处的约束力。

解: 取整个构架为研究对象。链杆 CD 为二力杆, 故支座 D 的约束力 F_D 沿 CD 中心线。

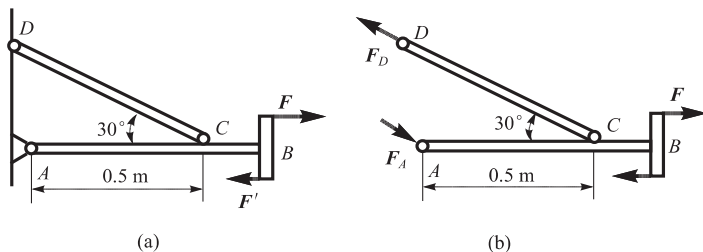


图 2-20 丁字横梁

另外, 根据力偶只能与力偶平衡的性质, 支座 A 的约束力 F_A 与 F_D 也必组成一个力偶与已知力偶相平衡, 故 F_A 与 F_D 等值且反向平行, 如图 2-20 (b) 所示。由平面力偶系的平衡条件有

$$\sum M_i = 0, F_A \cdot AC \sin 30^\circ - M = 0$$

$$F_A = \frac{M}{AC \sin 30^\circ} = \frac{100 \text{ N} \cdot \text{m}}{0.5 \text{ m} \times 0.5} = 400 \text{ N}$$

$$F_D = 400 \text{ N}$$

2.2.4 力的平移定理

若力的作用线不通过物体的转动中心, 则其对物体的作用同一个平移力和一个附加力偶对物体的联合作用等效。

证明: 设一力 F 作用于刚体上点 A , 今欲将此力平移到刚体上点 O (图 2-21 (a)), 为此, 在点 O 加上一对平衡力 F' , F'' , 并使它们与力 F 平行且大小相等 (图 2-21 (b)), 此时的力系 F , F' , F'' 与原力 F 等效。由图可看出力 F 与 F'' 组成一力偶, 称为附加力偶, 其力偶矩为 $M = Fd = M(F)$ 。于是力系 F , F' , F'' 与力系 F' , M 等效 (图 2-21 (c))。因此, 力 F 与力系 F' , M 等效, 即力 F 可从点 A 平移至点 O , 但必须同时附加一力偶, 附加力偶矩等于原力对指定点之矩。

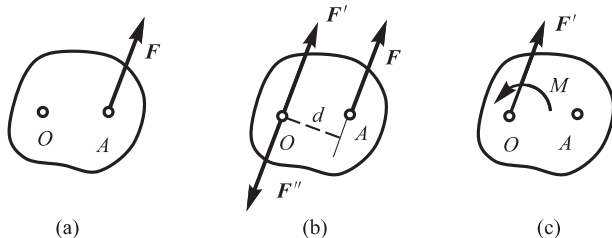


图 2-21 力的平移

力的平移定理揭示了力对刚体产生移动和转动两种运动效应的实质。以打乒乓球为例（图 2-22），当用球板挡球时，球拍对球的作用力通过球的质心，球将平动而不带旋转；当用球板削球，球板对球的作用力擦在球边（图 2-22（b）），此时，在球心加一对与作用力大小相等、作用线平行而方向相反的平衡力系，即可分离出球板所受作用力有两种作用效果：平动和转动。

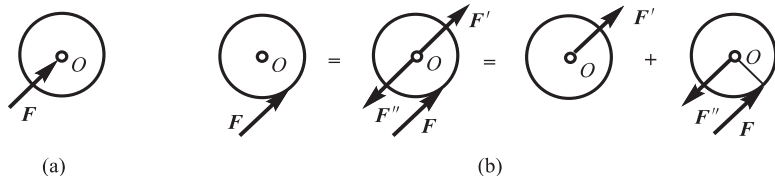


图 2-22 偏心力的作用

顺便指出，力的平移定理的逆定理是成立的。即：刚体的某平面上的一力 F 和一力偶 M 可进一步合成得到一个合力 F_R ， $F_R = F$ ，力 F_R 的作用线相对于力 F 的作用线平移了一段距离。

2.3 平面平行力系的合成与平衡

若力系中各力的作用线与 y （或 x ）轴平行，显然式（2-6）中 $\sum F_y = 0$ （或 $\sum F_x = 0$ ），则力系独立的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \sum F_y = 0 \quad \text{或} \quad \sum F_x = 0 \\ \sum M_O(\mathbf{F}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-15)$$

式（2-15）表明平面平行力系平衡的充要条件为：力系中各力在与力平行的坐标轴上投影的代数和为零，各力对任意点之矩的代数和也为零。

平面平行力系的平衡方程另一种形式为二矩式，即

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A(\mathbf{F}) = 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (A, B \text{ 连线不与各力 } \mathbf{F} \text{ 平行}) \quad (2-16)$$

平面平行力系只有两个独立的平衡方程，因而只能求解两个未知量。下面通过举例说明各种平面平行力系平衡方程的应用。

例 2.8 一桥梁桁架受载荷 F_1 和 F_2 作用，桁架各杆的自重不计，尺寸如图 2-23 所示。已知 $F_1 = 70 \text{ kN}$ ， $F_2 = 30 \text{ kN}$ ，试求 A 、 B 支座的约束力。

解: 取桁架整体为研究对象, 支座 A 的约束力应与各力作用线平行, 因此作用在桁架上的已知力 F_1 , F_2 和未知力 F_A , F_B 组成了平衡的平面平行力系, 如图 2-23 所示。列平衡方程如下

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, F_B \times 15 \text{ m} - F_1 \times 3 \text{ m} - F_2 \times 9 \text{ m} = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_A + F_B - F_1 - F_2 = 0$$

解得

$$F_A = 32 \text{ kN} \quad F_B = 68 \text{ kN}$$

例 2.9 图 2-24 (a) 所示为塔式起重机简图。已知: 机身重 $W = 220 \text{ kN}$, 最大起重量 $G_1 = 50 \text{ kN}$, 平衡块重 $G_2 = 30 \text{ kN}$ 。试分别求出空载和满载时, 轨道对机轮 A , B 的法向约束力, 并问此起重机在空载和满载时会不会翻倒。

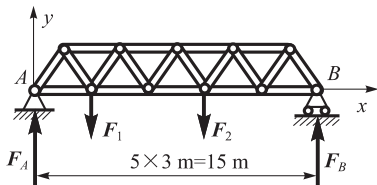


图 2-23 桁架结构

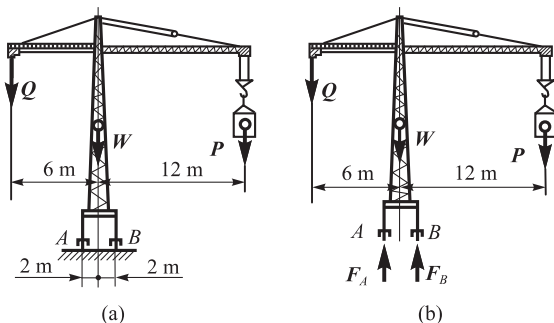


图 2-24 塔式起重机

解: 选起重机为研究对象, 作用在起重机上的主动力有 W , Q , P , 它们都是铅垂向下的, 轨道对机轮的约束力 F_A , F_B , 它们都是竖直向上的, 受力如图 2-24 (b) 所示, 图中各力构成了平面平行力系, 根据平面平行力系的平衡条件有

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, Q \times (6 - 2) \text{ m} - W \times 2 \text{ m} - P \times (12 + 2) \text{ m} + F_A \times 4 \text{ m} = 0$$

$$\sum M_B(\mathbf{F}) = 0, Q \times (6 + 2) \text{ m} + W \times 2 \text{ m} - P \times (12 - 2) \text{ m} - F_B \times 4 \text{ m} = 0$$

解得

$$\left. \begin{aligned} F_A &= 2Q + 0.5W - 2.5P \\ F_B &= -Q + 0.5W + 3.5P \end{aligned} \right\}$$

(1) 满载时, 把 $P = 50 \text{ kN}$ 代入约束力方程解得

$$F_A = 2 \times 30 \text{ kN} + 0.5 \times 220 \text{ kN} - 2.5 \times 50 \text{ kN} = 45 \text{ kN}$$

$$F_B = -30 \text{ kN} + 0.5 \times 220 \text{ kN} + 3.5 \times 50 \text{ kN} = 255 \text{ kN}$$

(2) 空载时, 把 $P = 0$ 代入约束力方程解得

$$F_A = 2 \times 30 \text{ kN} + 0.5 \times 220 \text{ kN} = 170 \text{ kN}$$

$$F_B = -30 \text{ kN} + 0.5 \times 220 \text{ kN} = 80 \text{ kN}$$

满载时, 为了保证起重机不致绕 B 点翻倒, 要求轨道对 A 轮的约束力 F_A 大于零; 空载时, 为了保证起重机不致绕 A 点翻倒, 要求轨道对 B 轮的约束力 F_B 大于零。本例计算结果表明: 满载时, $F_A = 45 \text{ kN} > 0$; 空载时, $F_B = 80 \text{ kN} > 0$ 。因此, 起重机在使用过程中不会翻倒。

2.4 平面一般力系的简化

2.4.1 平面一般力系向一点简化

作用于刚体上的平面一般力系 $F_1, F_2, \dots, F_n$, 如图 2-25 (a) 所示, 力系中各力的作用点分别为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 。在平面内任取一点 O , 称为简化中心。根据力的平移定理将力系中各力的作用线平移至 O 点, 得到一汇交于 O 点的平面汇交力系 $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$ 和一附加平面力偶系 $M_1 = M_O(F_1), M_2 = M_O(F_2), \dots, M_n = M_O(F_n)$, 如图 2-25 (b) 所示, 按照式 (2-2) 和式 (2-13) 将平面汇交力系与平面力偶系分别合成, 可得到一个力 F'_R 与一个力偶 M_O , 如图 2-25 (c) 所示。

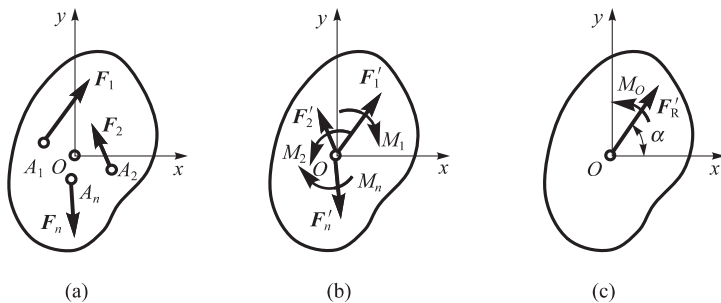


图 2-25 平面一般力系的简化

平面汇交力系各力的矢量和为

$$F'_R = \sum F' = \sum F \quad (2-17)$$

F'_R 称为原力系的主矢, 此主矢不与原力系等效。在平面直角坐标系 Oxy 中, 有

$$\left. \begin{aligned} F'_{Rx} &= \sum F_x \\ F'_{Ry} &= \sum F_y \end{aligned} \right\} \quad (2-18)$$

$$\left. \begin{aligned} F'_R &= \sqrt{(F'_{Rx})^2 + (F'_{Ry})^2} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \\ \tan \alpha &= \left| \frac{\sum F_y}{\sum F_x} \right| \end{aligned} \right\} \quad (2-19)$$

式中, F'_{Rx} , F'_{Ry} , F_x , F_y 分别为主矢与各力在 x , y 轴上的投影; F'_R 为主矢的大小; 夹角 $\alpha (F'_R, x)$ 为锐角, F'_R 的指向由 $\sum F_x$ 和 $\sum F_y$ 的正负号决定。

附加平面力偶系的合成结果为合力偶, 其合力偶矩为

$$M_O = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M_O(F) = \sum M$$

M_O 称为原力系对简化中心 O 点的主矩, 此主矩不与原力系等效。

主矢 F'_R 等于原力系的矢量和, 其作用线通过简化中心。它的大小和方向与简化中心的位置无关; 而主矩 M_O 等于原力系中各力对简化中心力矩的代数和, 在一般情况下主矩与简化中心的位置有关。原力系与主矢和主矩的联合作用等效。

2.4.2 简化结果的讨论

平面一般力系向一点简化, 一般可得一力 (主矢) 和一力偶 (主矩), 但这并不是简化的最终结果。当主矢和主矩出现不同值时, 简化的最终结果将会是表 2-1 所列的情形。

表 2-1 平面一般力系简化结果

主矢 F'_R	主矩 M_O	简化结果	意 义
$F'_R \neq 0$	$M_O \neq 0$	合力 F_R	$F_R = F'_R$, F_R 的作用线与简化中心 O 点的距离为 $d = \frac{ M_O }{F_R}$
	$M_O = 0$	合力 F_R	$F_R = F'_R$, F_R 的作用线通过简化中心 O 点
$F'_R = 0$	$M_O \neq 0$	合力偶 M_O	$M_O = \sum M_O(F)$, 主矩 M_O 与简化中心 O 点位置无关
	$M_O = 0$	力系平衡	平面一般力系平衡的必要和充分条件为 $\left. \begin{aligned} F'_R &= 0 \\ M_O &= 0 \end{aligned} \right\}$

例 2.10 一矩形平板 $OABC$, 在其平面内受 F_1 , F_2 及 M 的作用, 如图 2-26 (a) 所示。已知 $F_1 = 20 \text{ kN}$, $F_2 = 30 \text{ kN}$, $M = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 求此力系的合成结果。

解: 取 O 点为简化中心, 选取坐标轴如图 2-26 (a) 所示。

(1) 求主矢量 F'_R 。

$$F'_{Rx} = \sum F_x = F_1 \sin 20^\circ + F_2 \cos 30^\circ = 20 \text{ kN} \times 0.342 + 30 \text{ kN} \times 0.866 = 32.8 \text{ kN}$$

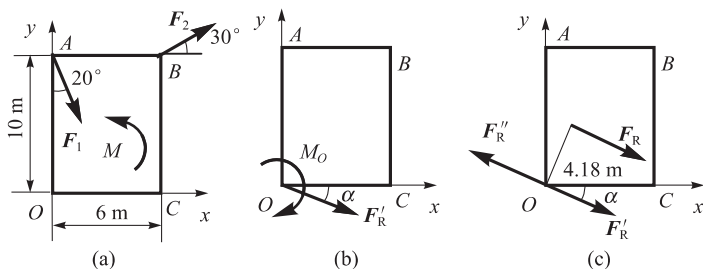


图 2-26 矩形平板

$$F'_{Ry} = \sum F_y = -F_1 \cos 20^\circ + F_2 \sin 30^\circ = -20 \text{ kN} \times 0.940 + 30 \text{ kN} \times 0.5 = -3.8 \text{ kN}$$

$$F'_R = \sqrt{(F'_{Rx})^2 + (F'_{Ry})^2} = \sqrt{(32.8 \text{ kN})^2 + (-3.8 \text{ kN})^2} = 33 \text{ kN}$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{\sum F_y}{\sum F_x} \right| = \left| \frac{-3.8 \text{ kN}}{32.8 \text{ kN}} \right| = 0.116$$

$$\alpha = 6.6^\circ$$

由于 F'_{Rx} 为正值, F'_{Ry} 为负值, 所以主矢 $\mathbf{F}'_R$ 指向第四象限 (图 2-26 (b))。

(2) 求主矩 M_O 。

$$\begin{aligned} M_O &= \sum M_O(\mathbf{F}) = \sum M_O(\mathbf{F}_1) + \sum M_O(\mathbf{F}_2) + M \\ &= -F_1 \sin 20^\circ \cdot OA - F_2 \cos 30^\circ \cdot OA + F_2 \sin 30^\circ \cdot OC + M \\ &= -20 \text{ kN} \times 0.342 \times 10 \text{ m} - 30 \text{ kN} \times 0.866 \times 10 \text{ m} + 30 \text{ kN} \times 0.5 \times 6 \text{ m} + 100 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ &= 138 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

(3) 求合力 $\mathbf{F}_R$ 。

$$F_R = F'_R = 33 \text{ kN}$$

$$\alpha = 6.6^\circ$$

$$d = \frac{|M_O|}{F'_R} = \frac{138 \text{ kN} \cdot \text{m}}{33 \text{ kN}} = 4.18 \text{ m}$$

因为 M_O 是顺时针转向, 故合力 $\mathbf{F}_R$ 应在主矢量 $\mathbf{F}'_R$ 的上方, 合力的作用线至 O 点的距离为 4.18 m (图 2-26 (c))。

2.5 平面一般力系的平衡方程及其应用

2.5.1 平面一般力系的平衡方程

由表 2-1 知, 平面一般力系平衡的充分必要条件为主矢与主矩同时为零, 即

$$\left. \begin{aligned} F'_R &= \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 0 \\ M_O &= \sum M_O(\mathbf{F}) = 0 \end{aligned} \right\}$$

故有

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_O(\mathbf{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-20)$$

式(2-20)称为平面一般力系的平衡方程基本形式,可简称为二投影一矩式。它表明平面一般力系平衡的解析充要条件为:力系中各力在平面内两个任选坐标轴的每个轴上投影的代数和均等于零,各力对平面内任意一点之矩的代数和也等于零。式(2-20)最多能够求得包括力的大小和方向在内的三个未知量。

平面一般力系平衡方程除了式(2-20)的基本形式外,还有其他两种形式。

一投影两矩式平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \quad \text{或} \quad \sum F_y = 0 \\ \sum M_A(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-21)$$

其中两点连线 AB 不能与投影轴 x (或 y)垂直。

三矩式平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_C(\mathbf{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-22)$$

其中 A, B, C 三点不共线。

解具体问题时可据已知条件和便于解题的原则选用某一种形式。

2.5.2 解题步骤与方法

(1) 确定研究对象,画出受力图。

应将已知力和未知力共同作用的物体作为研究对象,取出分离体画受力图。

(2) 选取投影坐标轴和矩心,列平衡方程。

列平衡方程前应先确定力的投影坐标轴和矩心的位置,然后列方程。若受力图上有两个未知力相互平行,可选垂直于此二力的直线为投影轴;若无两未知力相互平行,则选两未知力的交点为矩心;若有两正交未知力,则分别选取两未知力所在直线为投影坐标轴,选两未

知力的交点为矩心。恰当选取坐标轴和矩心,可使单个平衡方程中未知量的个数减少,便于求解。

(3) 求解未知量,讨论结果。

将已知条件代入平衡方程式中,联立方程求解未知量。必要时可对影响求解结果的因素进行讨论;还可以另选一不独立的平衡方程,对某一解答进行验算。

例 2.11 外伸梁如图 2-27 (a) 所示。在 C 处受集中力 F 作用,设 $F = 30 \text{ kN}$,试求 A, B 支座的约束力。

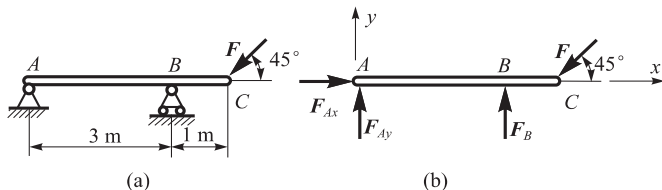


图 2-27 外伸梁

解: (1) 取梁为分离体,画受力图。

梁受到 B 端已知力 F 和固定铰 A 点的约束力 F_{Ax}, F_{Ay} , 活动铰 B 点的约束力 F_B , 为平面一般力系情况,如图 2-27 (b) 所示。

(2) 建立直角坐标系 Axy , 列平衡方程。

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, & F_{Ax} - F \cos 45^\circ &= 0 \\ \sum F_y &= 0, & F_{Ay} - F \sin 45^\circ + F_B &= 0 \\ \sum M_A(F) &= 0, & F_B \times 3 \text{ m} - F \sin 45^\circ \times 4 \text{ m} &= 0\end{aligned}$$

(3) 求解未知量。

将已知条件 $F = 30 \text{ kN}$ 分别代入平衡方程式,解得

$$F_{Ax} = 21.2 \text{ kN} \quad F_{Ay} = -7.1 \text{ kN} \quad F_B = 28.3 \text{ kN}$$

计算结果为正,说明各未知力的实际方向均与假设方向相同。若计算结果为负,则未知力的实际方向与假设方向相反。

例 2.12 一木屋架如图 2-28 (a) 所示, A, B 两端分别为固定和可动铰链支座,已知屋面的载荷 $F_1 = F_2 = 10 \text{ kN}$, AC 边还受到方向垂直于 AC 的均布载荷,其载荷集度为 $q = 1 \text{ kN/m}$,屋架的跨度为 $4a = 6 \text{ m}$,试求支座 A, B 的约束力。

解: (1) 选取屋架为研究对象,画受力图(图 2-28 (b))。

(2) 建立直角坐标系 Axy , 列平衡方程。

列平衡方程时,均布载荷可以视为集中力 Q , Q 力的作用点在均布载荷的中点, Q 力的大小应等于载荷集度与均布载荷分布长度的乘积,本例中有

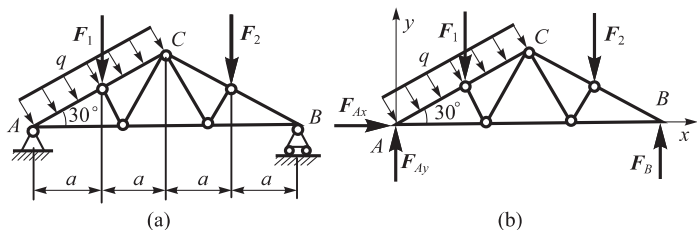


图 2-28 平面屋架

$$Q = AC \cdot q = \frac{2a}{\cos 30^\circ} \times q = 3.46 \text{ kN}$$

根据平面一般力系的平衡方程有

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, & F_{Ax} + Q \sin 30^\circ &= 0 \\ \sum F_y &= 0, & F_{Ay} - F_1 - F_2 - Q \cos 30^\circ + F_B &= 0 \\ \sum M_A(\mathbf{F}) &= 0, & -aF_1 - 3aF_2 - Q \times \frac{a}{\cos 30^\circ} + 4aF_B &= 0 \end{aligned}$$

(3) 求解未知量。

将已知条件 $F_1 = F_2 = 10 \text{ kN}$, $4a = 6 \text{ m}$, $Q = 3.46 \text{ kN}$ 代入平衡方程, 解得

$$F_{Ax} = -1.73 \text{ kN} \quad F_{Ay} = 12 \text{ kN} \quad F_B = 11 \text{ kN}$$

2.6 静定与超静定问题及物系的平衡

2.6.1 静定与超静定问题的概念

前面所介绍的物体平衡计算问题中, 应求解未知量的个数均未超过其相应的独立平衡方程个数, 并且不论如何改变刚体所受的外力, 都可求得唯一解, 力学中称此类问题为静定问题。在本章只研究静定问题。

对工程中多数构件与结构, 为了提高刚度和坚固性, 往往增加多余的约束, 因而使约束力的个数超过能列出的独立平衡方程的个数。这样, 依靠力学中建立的平衡方程不能求出刚体所受的全部约束力。此类问题称为超静定问题。如图 2-29 (a), (b) 所示情况均属超静定问题。图 2-29 (a) 为一厂房结构, 顶拱两端铰支, 立柱均固定于地面, 是个超静定问题。图 2-29 (b) 所示的机床主轴受三个轴承支承, 也是个超静定问题。对于超静定问题, 必须考虑构件因受力而产生的变形, 列出足够的补充方程后才能求出全部未知力, 有待于材料力学作进一步讨论。

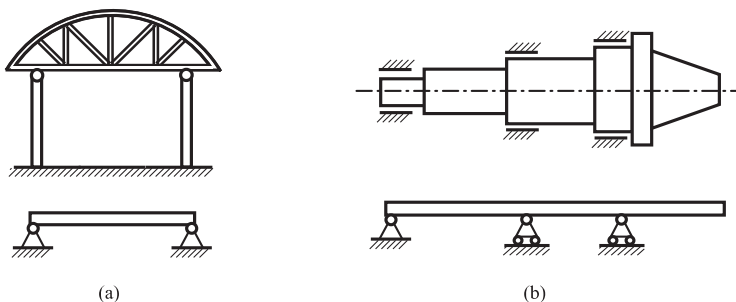


图 2-29 超静定结构

2.6.2 物系的平衡

工程中的机械或结构一般总是由若干物体以一定形式的约束联系在一起而组成的，这个组合体称为物体系统，或简称物系。

在第1章中，已叙述过物系分离体的受力图画法及其注意事项。若物系有 n 个物体，在平面问题中，对每个物体可列出不超过三个独立的平衡方程，就整个物系而言，就有不超过 $3n$ 个独立的平衡方程。若系统的平衡问题中未知量个数等于或小于独立的平衡方程式的个数时，问题为静定问题，否则，问题就属于超静定问题。

解决物系的受力分析问题，总是运用静力平衡方程式建立已知量和未知量的关系，并进一步用已知量表达出未知量。所以，解决物系的平衡问题时，应当首先从有已知力作用的、而未知力个数少于或等于独立平衡方程个数的物体开始着手分析，这个条件称为可解条件。对符合可解条件的分离体先行求解，将求得物系的内力，通过作用与反作用关系，转移到其他物体作为已知力，逐步扩大已知量的数目直至全部解决。这就是求解物系平衡的大致顺序。

下面举例说明物系平衡问题的解法。

例 2.13 人字梯由 AB 、 AC 两杆在 A 点铰接，又在 D 、 E 两点用水平绳连接。梯子放在光滑的水平面上，其一边有人攀登而上，人重为 G ，尺寸如图 2-30 (a) 所示。如不计梯重，求绳的张力及铰链 A 的内力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 。

解：(1) 选取研究对象。此题可能取的对象有人字梯整体、 AB 杆、 AC 杆。其中整体所受力系为平面平行力系，而且只有两个未知力，符合可解条件。 AB 及 AC 杆所受力系为平面一般力系，每个杆件都有四个未知力，无法求解，故须先从整体的平衡条件中解出地面约束力 F_B 、 F_C 后，再求解其他未知力。现先取整体为研究对象，并画出其分离体受力图，如图 2-30 (b) 所示。

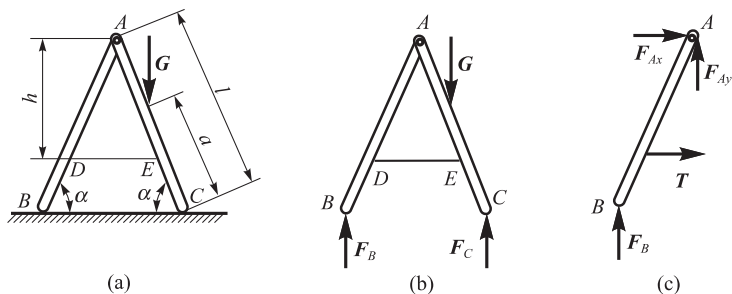


图 2-30 人字梯

(2) 列平衡方程求解。

$$\sum M_C(F) = 0, \quad G \cdot a \cdot \cos \alpha - F_B 2l \cos \alpha = 0$$

解得

$$F_B = G \frac{a}{2l}$$

求出 F_B 后, 再取 AB 杆为研究对象, 画出其分离体受力图, 如图 2-30 (c) 所示。有

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & F_{Ax} + T &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & F_{Ay} + F_B &= 0 \\ \sum M_A(F) &= 0 & Th - F_B l \cos \alpha &= 0 \end{aligned}$$

解得

$$F_{Ax} = \frac{-G a \cos \alpha}{2h}, \quad F_{Ay} = -G \frac{a}{2l}, \quad T = \frac{G a \cos \alpha}{2h}$$

(3) 分析几何参数对解的影响。

对 T 及 F_{Ax} 而言, 当 h 及 α 值减而 a 值增大时, T 及 F_{Ax} 随之增大。对 F_{Ay} 而言, 当 a/l 增大时, F_{Ay} 随之增大。

例 2.14 图 2-31 (a) 中的起重架, 自重不计, A, B, D 处均为铰接, E 端为固定端支座, 在横杆 AC 的 C 端挂一重物, 其重力 $P = 5 \text{ kN}$ 。试求固定端支座 E 及铰链 A, B, D 处的约束力。

解: 取整体为研究对象, 可以求出固定端支座 E 处的约束力 F_{Ex} 、 F_{Ey} 和约束力偶 M_E 。为了求出铰 A, B, D 处的约束力, 必须将物体系统从铰接点处拆开, 形成四个单个物体, 它们是重物、横杆 AC 、斜杆 BD 和竖杆 AE 。因重物平衡, 可求出作用于横杆 C 点处的拉力 $T = 5 \text{ kN}$ 。斜杆 BD 是二力杆, 因而确定铰 B 和铰 D 处的相互作用力的方向是沿杆轴 BD 的方向, 根据斜杆 BD 的平衡条件有 $F'_D = F'_B$, 详见受力图 (图 2-31 (b))。

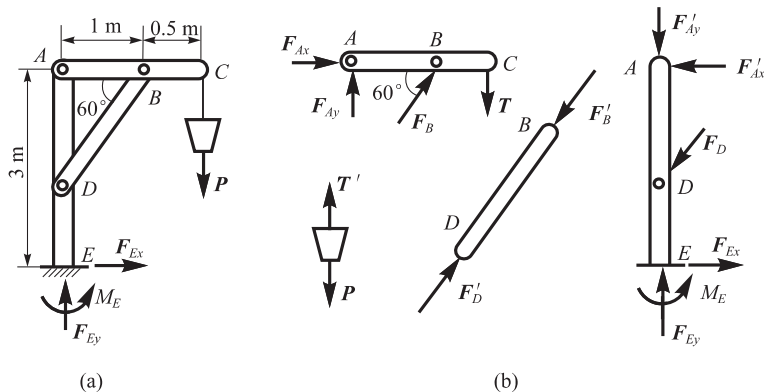


图 2-31 起重架

(1) 取整体为研究对象。有

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & F_{Ex} &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & F_{Ey} - P &= 0 \\ \sum M_E(\mathbf{F}) &= 0 & M_E - P \times 1.5 \text{ m} &= 0\end{aligned}$$

解得

$$F_{Ex} = 0 \quad F_{Ey} = 5 \text{ kN} \quad M_E = 7.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(2) 取横杆 AC 为研究对象。有

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & F_{Ax} + F_B \cos 60^\circ &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & F_{Ay} + F_B \sin 60^\circ + T &= 0 \\ \sum M_A(\mathbf{F}) &= 0 & T \times 1.5 \text{ m} - F_B \sin 60^\circ \times 1 \text{ m} &= 0\end{aligned}$$

解得

$$F_{Ax} = -4.35 \text{ kN} \quad F_{Ay} = -2.5 \text{ kN} \quad F_B = 8.7 \text{ kN}$$

解得结果为负值, 说明未知力的实际指向与原假设的指向相反。

通过以上例题的分析, 可将求解物体系统的平衡问题的要领归纳如下。

(1) 要抓住一个“拆”字。将物体系统从相互联系的地方拆开, 在拆开的地方用相应的约束力代替约束对物体的作用。这样, 就把物体系统分解为若干个单个物体, 单个物体受力简单, 便于分析。

(2) 比较系统的独立平衡方程个数和未知量个数, 若彼此相等, 则可根据平衡方程求解出全部未知量。一般来说, 由 n 个物体组成的系统, 可以建立 $3n$ 个独立的平衡方程。

(3) 根据已知条件和所求的未知量, 选取研究对象。通常可先由整体系统的平衡, 求

出某些待求的未知量,然后再根据需要适当选取系统中的某些部分作为研究对象,求出其余的未知量。

(4) 在各单个物体的受力图上,物体间相互作用的力一定要符合作用与反作用关系。物体拆开处的作用与反作用关系,是继续求解未知力的“桥”。在一个物体上,可能某拆开处的相互作用力是未知的,但求解之后,对于它在该处相联系的另一物体就成为已知的了。可见,作用与反作用关系在这里起“桥”的作用。

(5) 选择平衡方程的形式和选取适当的坐标轴和矩心,尽可能做到一个平衡方程中只含有一个未知量,并尽可能使计算简化。

2.7 摩 擦

以前各章中分析物体受力时,都把物体的表面看作是绝对光滑的,忽略了物体之间的摩擦。其实,摩擦是一种普遍存在的现象。在一些问题中,摩擦对物体的受力情况的影响很小,为了计算方便可以忽略不计。但在工程上有些摩擦问题是不能忽略的,甚至起到了决定性的作用。例如,闸瓦制动、摩擦轮传动等,都要依靠摩擦来工作。

按照接触物体之间可能存在的相对滑动或相对滚动,把摩擦分为滑动摩擦和滚动摩擦。

2.7.1 滑动摩擦

两个相互接触的物体,发生相对滑动,或存在相对滑动趋势时,彼此之间就有阻碍滑动的力存在,此力称为滑动摩擦力。根据两物体之间是否产生滑动可把滑动摩擦力分为静滑动摩擦力和动滑动摩擦力。由于摩擦对物体的运动起阻碍作用,所以摩擦力总是作用于接触面(点),沿接触处的公切线,与物体滑动或滑动趋势的方向相反。因此画摩擦力前应先确定物体的运动或运动趋势方向。

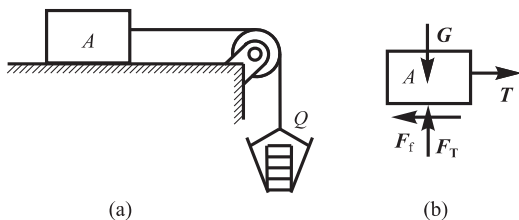


图 2-32 摩擦实验

为了认识摩擦的规律,可以做如下的实验。实验装置如图 2-32 (a) 所示。重量为 G 的重物 A 放在水平面上,绳子的一端与重物 A 相连,另一端通过滑轮与装砝码的盘子相连。略去绳重和滑轮阻力,绳子对重物 A 的拉力 T 的大小就等于砝码和盘子的重量 Q 。实验情况分述如下。

1. 静滑动摩擦

实验表明,逐渐增加砝码的重量而不超过一定范围时,重物 A 始终保持静止。这说明沿水平方向有一个阻止重物 A 滑动的力 F_f 存在。即当两接触物体之间只有滑动趋势时,物

体接触表面产生的摩擦力，我们把它称为静滑动摩擦力，简称静摩擦力。

静止状态下的静摩擦力随主动力的变化而变化，其大小由重物 A 的平衡条件确定（图 2-32（b）），介于零和最大静摩擦力之间，即

$$0 \leq F_f < F_{fm}$$

2. 静摩擦定律

当拉力 T 增大到某一值时，重物 A 处于将要滑动的临界静止状态，此时的静摩擦力达到最大值，称为最大静摩擦力。实验表明，其大小与接触面间的正压力 F_N （法向约束力）成正比，而与物体的接触面积无关，即

$$F_{fm} = f_s F_N \quad (2-23)$$

式（2-23）称为静摩擦定律。式中， F_{fm} 称为最大静摩擦力；比例常数 f_s 称为静滑动摩擦因数，简称静摩擦因数，其大小取决于相互接触物体表面的材料性质和表面状况（如表面粗糙度、润滑情况以及温度、湿度等）。

3. 动滑动摩擦

在图 2-32（a）的实验装置中，当拉力 T 之值稍大于 F_{fm} 时，重物就开始滑动，此时沿接触面所产生的摩擦力 F'_f 称为动滑动摩擦力。即当两接触物体之间有相对滑动时，物体接触表面产生的摩擦力称为动滑动摩擦力，简称动摩擦力。

当物体处于相对滑动状态时，在接触面上产生的滑动摩擦力 F'_f 的大小与接触面间的正压力 F_N 成正比，即

$$F'_f = f' F_N \quad (2-24)$$

式（2-24）称为动摩擦定律。式中，比例常数 f' 称为动摩擦因数，它与物体接触表面的材料性质、表面状况及相对滑动速度有关，其值一般略小于静摩擦因数，即有 $f_s > f'$ 。这说明推动物体从静止到开始滑动比较费力，一旦物体滑动起来后，要维持物体继续滑动就省力了。精度要求不高时，可视为 $f_s \approx f'$ 。部分常用材料的 f_s 及 f' 值如表 2-2 所示。

表 2-2 常见材料的滑动摩擦因数*

材料名称	摩 擦 因 数			
	静摩擦因数 (f_s)		动摩擦因数 (f')	
	无润滑剂	有润滑剂	无润滑剂	有润滑剂
钢-钢	0.15	0.1~0.12	0.1	0.05~0.10
钢-铸铁	0.2~0.3		0.16~0.18	0.05~0.15
钢-青铜	0.15~0.18	0.1~0.15		0.07
钢-轴承合金			0.2	0.04

续表

材料名称	摩 擦 因 数			
	静摩擦因数 (f_s)		动摩擦因数 (f')	
	无润滑剂	有润滑剂	无润滑剂	有润滑剂
铸铁 - 铸铁		0.2	0.18	0.07 ~ 0.15
铸铁 - 青铜	0.28	0.16	0.15 ~ 0.21	0.07 ~ 0.15
铸铁 - 皮革	0.55	0.15	0.28	0.12
铸铁 - 橡胶			0.8	0.5
青铜 - 青铜			0.15 ~ 0.20	0.04 ~ 0.10
木 - 木	0.4 ~ 0.6	0.10	0.2 ~ 0.5	0.07 ~ 0.10

* 本表摘自《机械设计实用手册》(化学工业出版社, 2003年第二版, 表1-1-41)。

由摩擦定律可知: 若要增大摩擦力, 可通过增大摩擦系数的方法 (如在汽车轮胎上制造花纹, 在车轮上缠链条, 在路面上撒煤渣等) 来实现, 也可用增大法向反力值来达到增大摩擦力的目的 (如张紧胶带轮上的胶带等)。若要减小摩擦力, 由于减小法向反力值一般比较困难, 所以主要通过减小摩擦系数的方法 (如在两物体的接触面上加润滑剂, 降低接触面的粗糙度等) 来实现。

2.7.2 摩擦角

当考虑摩擦时, 支承面对物体的约束力由法向力 F_N 和摩擦力 F_f 组成, 这两个力的合力 F_R (图 2-33 (a)) 称为支承面对物体的全约束力。全约束力与支承面的法线间的夹角为 φ , 显然, 如垂直于支承面的主动力 Q 不变, 则物体在滑动前, 摩擦力 F_f 以及角 φ 均随主动力 P 的增大而增大。设 P 增大到 P_1 时物体处于临界平衡状态, 这时摩擦力 F_f 达到最大值 F_{fm} , 同时角 φ 也达到最大值 φ_m , 这个角 φ_m 叫做摩擦角 (图 2-33 (b))。由图 2-33 (b) 的几何关系可以看出, $\tan \varphi_m = F_{fm}/F_N$, 因 $F_{fm} = f_s F_N$, 所以

$$\tan \varphi_m = f_s \quad (2-25)$$

即摩擦角的正切值等于静摩擦因数。可见 φ_m 与 f_s 一样, 也是表示材料摩擦性质的物理量。

由于静摩擦力 F_f 的值不能超过 F_{fm} , 所以约束全反力与支承面法线间的夹角也不可能大于摩擦角, 即

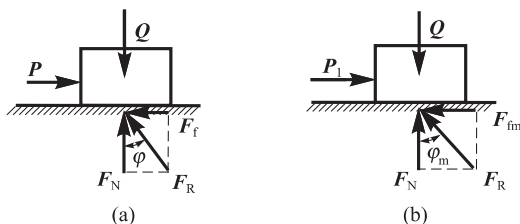


图 2-33 摩擦角

$$0 \leq \varphi \leq \varphi_m$$

因此,若作用于物体上的所有主动力的合力 S 的作用线与支承面法线间的夹角为 θ , 利用摩擦角的概念, 可得如下结论。

(1) 如 $\theta > \varphi_m$ (图 2-34 (a)), 此时, 无论 S 值多么小, 全约束力 F_R 都不可能与 S 共线, 因而物体不可能平衡而产生滑动。

(2) 如 $\theta < \varphi_m$ (图 2-34 (b)), 此时, 无论 S 多么大, 只要支承面不被压坏, 全约束力 F_R 总可以与 S 共线, 物体总能保持静止状态。这种现象就叫做自锁。

(3) 如 $\theta = \varphi_m$ (图 2-34 (c)), 则物体处于临界平衡状态。

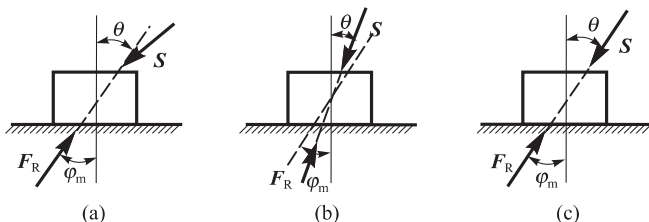


图 2-34 摩擦角与物体运动状态的关系

在工程上常常利用自锁现象,例如,传送带输送物料时就是借助自锁阻止了物料的下滑,千斤顶把重物顶起后借助自锁而使螺纹不至转动。但有时又须避免自锁,例如机器运转时,不允许零件产生自锁而“卡住”不动。

2.7.3 考虑摩擦时物体的平衡问题

考虑摩擦时物体的平衡问题,其计算方法和不计摩擦时的平衡问题相同。只是在画受力图时,除了主动力和一般的约束力外,还应添加摩擦力。应当注意,摩擦力的方向总是沿着接触面的切线与相对滑动趋势的方向相反。当物体处于临界状态时,摩擦力达到最大值。由于静摩擦力的大小在零和 F_{fm} 之间变化,所以这类问题的解不是一个确定值,而是用不等式表示的一个范围,这个范围叫做平衡范围。

如果用全约束力 F_R 表示临界静止状态下接触面的约束力,则在受力图上不再画最大静摩擦力,问题的解法亦与一般平衡问题无异了。

例 2.15 一重量为 $G = 600 \text{ N}$ 的物体放在倾角为 α 的斜面上,如图 2-35 (a) 所示。若静摩擦因数为 $f_s = 0.15$, 斜面的倾角 $\alpha = 30^\circ$ (大于摩擦角 φ_m)。为保持物块平衡,在其上加一水平力 F , 求该力的最小值和最大值。

解: 因为斜面角 $\alpha > \varphi_f$, 若不加力 $F_{\min}$, 物块将沿斜面下滑。如果水平力 $F_{\min}$ 太小, 物块也会下滑; 如果 $F_{\min}$ 太大, 物块将沿斜面上滑。所以, 为使物块平衡, 所加的水平力 $F_{\min}$ 应在一定的范围内。

(1) 求 $F_{\min}$ 。

$F_{\min}$ 为使物体不到下滑时所需的力 F 之最小值, 此时物体处于下滑临界状态, 所以作用在它上面的摩擦力应达到最大值, 且方向沿斜面向上。取物块为研究对象, 画出受力情况如图 2-35 (b) 所示。

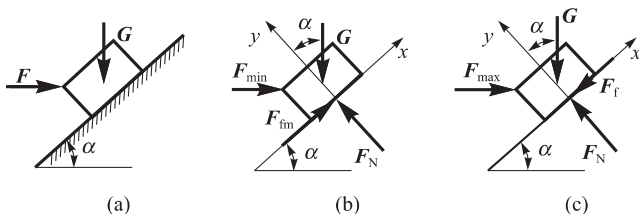


图 2-35 斜面摩擦

列平衡方程

$$\sum F_x = 0, F_{\min} \cos \alpha - G \sin \alpha + F_{\text{fm}} = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_N - F_{\min} \sin \alpha - G \cos \alpha = 0$$

列补充方程

$$F_{\text{fm}} = f_s F_N$$

解得

$$F_{\min} = \frac{\sin \alpha - f_s \cos \alpha}{\cos \alpha + f_s \sin \alpha} G = \frac{\sin 30^\circ - 0.15 \times \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ + 0.15 \times \sin 30^\circ} \times 600 \text{ N} = 236 \text{ N}$$

(2) 求 $F_{\max}$ 。

$F_{\max}$ 为使物体不致上滑时所需的力 F 之最大值, 此时物体处于向上滑动的临界状态。这时, 作用在物块上的摩擦力方向沿斜面向下, 摩擦力也达到最大值。物块的受力情况如图 2-35 (c) 所示。

列平衡方程

$$\sum F_x = 0, F_{\max} \cos \alpha - G \sin \alpha - F_{\text{fm}} = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_N - F_{\max} \sin \alpha - G \cos \alpha = 0$$

列补充方程

$$F_{\text{fm}} = f_s F_N$$

解得

$$F_{\min} = \frac{\sin \alpha + f_s \cos \alpha}{\cos \alpha - f_s \sin \alpha} G = \frac{\sin 30^\circ + 0.15 \times \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ - 0.15 \times \sin 30^\circ} \times 600 \text{ N} = 478 \text{ N}$$

综合以上结果可知, 使得物体保持静止的水平推力 F 的大小应满足下列条件

$$236 \text{ N} \leq F \leq 478 \text{ N}$$

本题也可用全约束力 $\mathbf{F}_R$ 来表示斜面的约束力, 同样得到上述结果。

例 2.16 图 2-36 (a) 所示为一起重机制动装置。已知鼓轮半径为 r , 制动轮半径为 R , 制动杆长为 l , 制动块与制动轮间的摩擦系数为 f_s , 起吊重量为 G , 其他尺寸如图 2-36 所示。求制动鼓轮的最小制动力 $F_{\min}$ 。

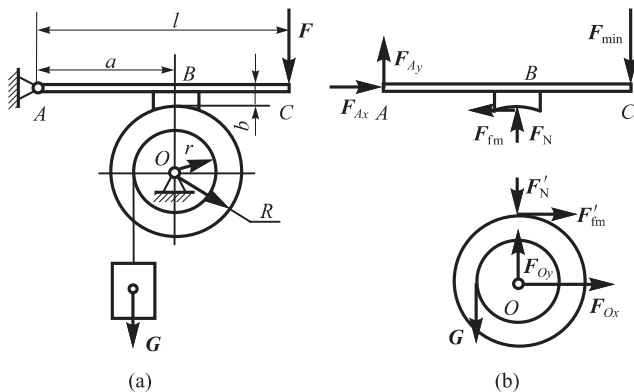


图 2-36 起重机制动装置

解: 鼓轮能被制动, 是由于制动块与制动轮间摩擦力的作用。当鼓轮恰被制动时, 制动力为最小值 $F_{\min}$, 静摩擦力达到最大值。

先取鼓轮为研究对象, 其受力图如图 2-36 (b) 所示。列平衡方程

$$\sum M_O(\mathbf{F}) = 0, F'_{\text{fm}} R - Gr = 0$$

列补充方程

$$F'_{\text{fm}} = f_s F'_N$$

解得

$$F'_N = \frac{Gr}{f_s R}$$

再取制动杆 ABC 为研究对象, 其受力图如图 2-36 (b) 所示。列平衡方程

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, F_N a - F_{\min} l - F_{\text{fm}} b = 0$$

解得

$$F_{\min} = \frac{Gr}{Rl} \left(\frac{a}{f_s} - b \right)$$

2.7.4 滚动摩擦

由实践经验可知, 滚动比滑动省力。在工程中, 为了减轻劳动强度, 常利用滚动来代替

滑动。例如,当搬运机器等重物时,若在重物底下垫上辊轴;塔式起重机下面装上轮子后沿路轨滚动;在混凝土浇灌器上安装导轮使之沿铅垂导轨向上,可减少摩擦;车辆用车轮,机器中用滚动轴承等,都是利用了这个性质。

将一重为 G 的轮子放在地面上,在轮心 O 处作用水平拉力 F (图 2-37 (a))。假设轮子和地面均为刚体,则接触点为 A 。显然轮子上的力矩不平衡,只要有微小的拉力作用,轮子就会发生滚动,这与事实不符。只有当拉力达到一定数值时,轮子才开始滚动,这说明地面对轮子有阻碍滚动的力偶存在,其原因是轮子和地面不是刚体,均要产生变形,变形后轮子与地面接触上的约束力分布如图 2-37 (b) 所示。

将这些平面分布约束力向点 A 简化,可得到一个作用在点 A 的力 F_R 和一个力偶 M_f ,此力偶起着阻碍滚动的作用,称为滚动摩擦力偶矩。将力 F_R 进一步分解为法向约束力 F'_N 和滑动摩擦力 F_f (图 2-37 (c)),并将法向约束力 F'_N 和滚动摩擦力偶矩 M_f 进一步按力的平移定理的逆定理进行合并,即可得到约束力 F_N ,其作用线向滚动方向偏移一段距离 e (图 2-37 (d))。当轮子处于临界状态时,滚动摩擦力偶矩和距离 e 均为最大值,并有

$$M_{fm} = e_{\max} F_N = K F_N \quad (2-26)$$

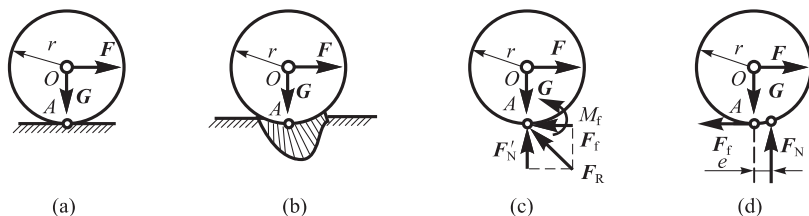


图 2-37 滚动摩擦

滚动摩擦力偶矩最大值 M_{fm} 与两个相互接触物体间的法向约束力 F_N 成正比,该结论称为滚动摩擦定律,比例常数 K 称为滚动摩擦系数,相当于滚动阻力偶的最大力偶臂 $e_{\max}$,故其单位为长度单位。该系数与物体接触表面的材料性质和表面状况有关。

表 2-3 常见材料的滚动摩擦系数*

材料名称	K/mm	材料名称	K/mm
软钢与软钢	0.5	表面淬火车轮与钢轨	~0.1
铸铁与软钢	0.5	圆锥形车轮	0.8 ~ 1
木材与钢	0.3 ~ 0.9	圆柱形车轮	0.5 ~ 0.7
木材与木材	0.5 ~ 0.8	钢轮与木面	1.5 ~ 2.5

续表

材料名称	K/mm	材料名称	K/mm
钢板与钢滚筒	0.2 ~ 0.7	橡胶轮胎与沥青路面	2.5
铸铁或钢轮与钢轨	0.5	橡胶轮胎与土路面	10 ~ 15

* 本表摘自《机械设计实用手册》(化学工业出版社, 2003 年第二版, 表 1-1-43)

一般若材料硬些, 受载后, 接触面的变形就小些, 滚动摩擦系数 K 也会小些。自行车轮胎气足时骑车省力, 火车轨道用钢轨, 轮子用铸铁轮都是增加硬度、减小滚动阻力偶的例子。

现在讨论为什么滚动比滑动省力。在图 2-37 中, 设使轮子滚动所需的最小水平力为 F_1 , 使其滑动所需的最小水平力为 F_2 。使轮子即将滚动时, 有

$$F_1 r = K F_N = K G, \text{ 即 } F_1 = \frac{K}{r} G$$

使轮子即将滑动时, 有

$$F_2 = f_s F_N = f_s G, \text{ 即 } F_2 = f_s G$$

式中的 f_s 为轮子与水平面间的静摩擦系数。

因为 $\frac{K}{r} \ll f_s$, 所以 $F_1 \ll F_2$, 即使轮子滚动要比滑动省力得多。

Q 先导案例解决

通过本章的学习, 我们来探讨一下先导案例中所提出的问题: P 与 Q 之间应满足什么条件时, 杆 BC 处于平衡状态? (为便于讨论, 杆的自重不计, 这样 AB 、 BC 、 CD 均可看着是二力杆, 力的作用线沿着杆件的轴线。)

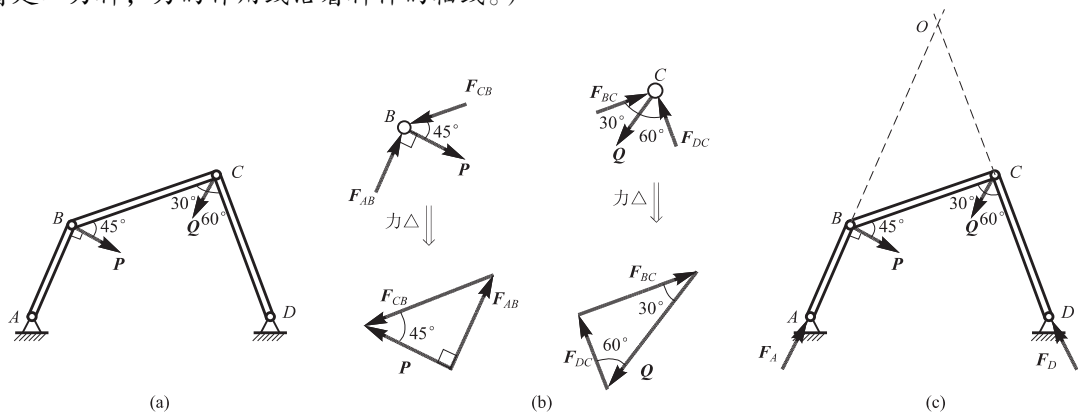


图 2-38 四杆机构平衡问题

[方法一] (节点法) 图 2-38 (b)

(1) 研究对象: 取节点 B

(2) 受力分析: F_{AB} , F_{CB} , P

(3) 作力三角形, 则 $F_{AB} = P$

$$F_{CB} = \sqrt{2} P$$

图 2-38 (c)

取节点 C

Q , F_{BC} , F_{CD}

作力三角形, 则 $Q \sin 60^\circ = F_{BC}$

因 $F_{CB} = F_{BC}$, 于是 $\sqrt{2} P = Q \sin 60^\circ$

$$\text{则 } \frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

[方法二] (解析法) 本案例若将 BC 杆作为研究对象, 分析其受力情况, 建立适当坐标系, 利用解析法亦可求解, 但过程相对较麻烦一些, 请自己演算看看。

[方法三] 本案例还有更简便的方法, 即取 ABCD 为研究对象, 如图 2-38 (d) 所示, 主动力为 P , Q , 因 A 点、D 点的约束力 F_A , F_D 作用线分别沿 AB 和 CD 杆延伸交于 O 点, 则 $M_O(F_A) = 0$, $M_O(F_D) = 0$, 又因系统平衡, 故取 $\sum M_O(F) = 0$, 于是

$$M_O(P) + M_O(Q) = 0$$

$$\text{即 } P \times BO - Q \cos 30^\circ \times CO = P \times \sqrt{2} BC - Q \cos 30^\circ \times BC = 0$$

$$\text{得 } \frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

● 学习经验 ●

(1) 学习时应弄清力矩、力偶的性质及力系简化方法与结论, 注意把握平面汇交力系、平面平行力系、平面一般力系的平衡条件及三者之间的关系。

(2) 在运用平衡方程求解物体或物系平衡问题时, 要恰当地选取研究对象, 正确画出各物体的受力图。应特别注意各受力图之间要彼此协调, 符合作用与反作用定律, 并注意二力杆、二力构件的判断。在解题时要注意选择平衡方程的形式、坐标系和矩心, 并尽可能做到一个平衡方程只含有一个未知量, 以简化计算。例 2.14 题后已作了归纳, 请认真阅读, 细心体会。

(3) 求解考虑摩擦的物体平衡问题时, 可将静滑动摩擦力作为未知约束力对待。应先判断出物体在主动力作用下的运动趋势, 从而决定静滑动摩擦力的方向。在列平衡方程时要考虑静滑动摩擦力的变化有一个范围, 从而引起答案也是一个有范围的值。只有判断物体已处于临界平衡状态的前提下, 才能应用补充方程 $F_{fm} = f_s F_N$, 求得的答案也是临界值, 否则, 只能应用平衡条件来决定静滑动摩擦力的大小。

(4) 本章内容较丰富, 为学好本章知识, 应做好课前预习、课后复习工作, 并做适量的习题。

本章小结

BENZHANGXIAOJIE

(1) 平面汇交力系的合成结果是一个合力 F_R 。

几何法：根据力多边形法则求合力，力多边形的封闭边表示合力 F_R 的大小和方向。

解析法：根据合力投影定理，利用力系中各分力在两个直角坐标轴上的投影的代数和，求合力的大小和方向。

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= \sum F_x & F_{Ry} &= \sum F_y \\ F_R &= \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} & \tan \alpha &= \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \end{aligned}$$

合力的作用线通过原汇交力系的交点。

(2) 平面汇交力系平衡的必要与充分条件是合力 F_R 为零。

几何法：力多边形自行封闭，即首尾端重合。

解析法：平面汇交力系中各分力在两个坐标轴上的投影的代数和都等于零，即 $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ 。应用这两个平衡方程，可以求解两个未知量。

(3) 力矩是力对物体转动效应的度量。可按力矩的定义 $M_O(\mathbf{F}) = \pm Fd$ 和合力矩定理 $M_O(\mathbf{F}_R) = \sum M_O(\mathbf{F})$ 来计算平面上力对点之矩。

(4) 力偶是另一个基本力学量，它的作用效应取决于三要素：力偶矩的大小、转向和力偶作用面的方位。力偶矩的值为力偶中任一力 F 的大小与力偶臂 d 的乘积，即

$$M(\mathbf{F}, \mathbf{F}') = \pm Fd$$

(5) 力的平移定理表明，力对刚体的作用与作用于该力作用线以外任一点的一平移力和一个附加力偶等效，附加力偶等于该力对平移点之矩。

(6) 平面力偶系合成的结果是一个合力偶。合力偶矩等于各分力偶矩的代数和，即 $M = \sum M_i$ 。平面力偶系的平衡条件是各力偶矩的代数和为零，即 $\sum M = 0$ 。应用该平衡方程可求解一个未知量。

(7) 平面平行力系平衡的充要条件为力系中各力在与力平行的坐标轴上投影的代数和为零，各力对任意点之矩的代数和也为零。只有两独立的平衡方程，应用它们只能求解两个未知量。

(8) 力系简化的主要依据是力的平移定理。平面一般力系向平面内任一点简化，一般可得到作用于简化中心的一个力和一个力偶。这个力称为主矢，它等于原力系中各力的矢量和，与简化中心的位置无关。这个力偶叫做原力系的主矩，它等于原力系中各力对简化中心力矩的代数和，一般与简化中心的位置有关。

(9) 平面一般力系的平衡方程有三种形式。

基本式: $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_O(F) = 0$;

两矩式: $\sum F_x = 0$ (或 $\sum F_y = 0$), $\sum M_A(F) = 0, \sum M_B(F) = 0$ (连线 AB 不能与 x 轴或 y 轴垂直);

三矩式: $\sum M_A(F) = 0, \sum M_B(F) = 0, \sum M_C(F) = 0$ (A, B, C 三点不共线)。

无论是哪种形式, 平面一般力系只能有三个独立的平衡方程, 求解三个未知量。

(10) 求解物体系统平衡问题的步骤。

适当选取研究对象, 画出各研究对象的受力图。

分析各受力图, 确定求解顺序, 并根据选定的顺序逐个选取研究对象求解。

(11) 滑动摩擦分为静滑动摩擦和动滑动摩擦。

静滑动摩擦力 F_f : $0 \leq F_f \leq F_{fm}$, F_f 由平衡条件确定, 而 $F_{fm} = f_s F_N$ 。

动滑动摩擦力 $F'_f = f' F_N$, F'_f 是在已发生滑动情况下的摩擦力, 略小于 F_{fm} 。

摩擦角 φ_m 是指物体处于临界滑动平衡状态时, F_{fm} 与 F_N 的合力 (全反力) 作用线与支承面的法线之间的夹角, $\tan \varphi_m = f_s$ 。

用解析法求解有静滑动摩擦的平衡问题时, 须先判断出静摩擦力的方向, 然后运用平衡方程求解, 其解一般是一个有范围的值。



思考题

1. 分力是否可能大于合力? 两个相等的分力与合力一样大, 条件是什么?
2. 图 2-39 为某平面汇交力系合成时所作的力多边形, 问该力系的合力在力多边形上怎样表示?
3. 在图 2-40 中, 两个力三角形中的三个力的关系有何不同?
4. 同一个力在两个互相平行的轴上的投影是否相等? 若两个力在同一轴上的投影相等, 这两个力是否一定相等?
5. 用手拔钉子拔不出来, 为什么用钉锤一下子就能拔出来? 手握钢丝钳, 为什么不用很大的握紧力就能把铁丝剪断?
6. 图 2-41 中, 力 F_1, F'_1 组成的力偶作用在 Oxy 平面内, 力 F_2, F'_2 组成的力偶作用在 Oyz 平面内, 它们的力偶矩值相等, 此两力偶是否等效?
7. 为什么力偶不能用一力与之平衡? 如何解释图 2-42 中的平衡现象?
8. 力向已知点平行移动时, 其附加力偶矩怎样确定?
9. 平面一般力系的合力与其主矢量的关系怎样? 在什么情况下其主矢量即为合力?
10. 在简化一个已知平面力系时, 选取不同的简化中心, 主矢和主矩是否不同? 力系简

化的最后结果会不会改变？为什么？

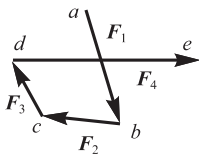
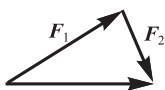
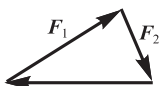


图 2-39 力多边形



(a)



(b)

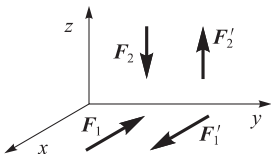


图 2-41 两对力偶

11. 在研究物体系统的平衡问题时，如以整个系统为研究对象，是否可能求出该系统的内力？为什么？

12. 一个物体放在不光滑的水平面上，此物体是否一定受到摩擦力的作用？

13. 图 2-43 中的物体 A 放在粗糙的斜面上，斜面的倾角 $\alpha > \varphi_m$ 时，物体将下滑。若在物体上加一个垂直于斜面的压力，能否阻止物体下滑？为什么？

14. 图 2-44 中的物体，重量均为 G ，接触面间的摩擦系数均为 f_s 。要使物体向右滑动，哪一种施力方法比较省力？为什么？

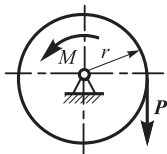


图 2-42 定滑轮

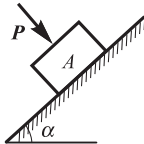
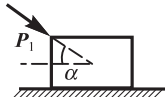
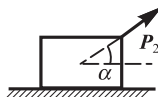


图 2-43 斜面物体



(a)



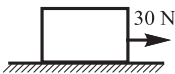
(b)

图 2-44 施力方法比较

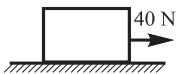
15. 图 2-45 中的物体重为 100 N，放置在水平面上，重物与水平面间的摩擦系数 $f_s = 0.3$ 。判断图示三种情况下摩擦力是多大？物体处于静止状态还是运动状态？



(a)



(b)



(c)

图 2-45 判断摩擦力的大小

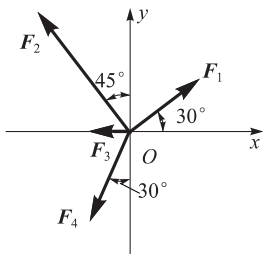
16. 拉车时，为什么车轮直径大，轮胎内气压高就省力？



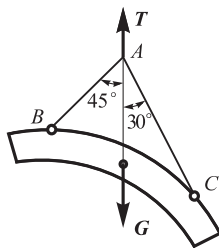
习题

1. 已知 $F_1 = 400$ N, $F_2 = 1\,000$ N, $F_3 = 100$ N, $F_4 = 500$ N，试用几何法求题 1 图所示汇交力系的合力。

2. 起吊时构件在题2图所示位置平衡, 构件重 $G = 30 \text{ kN}$ 。试用几何法求钢索 AB , AC 的拉力。

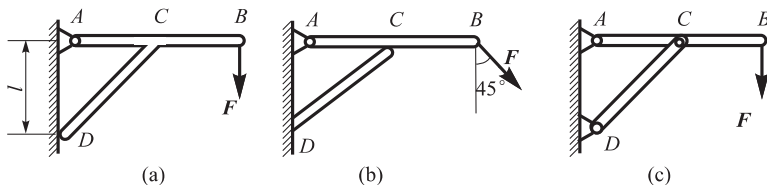


题1图 平面汇交力系



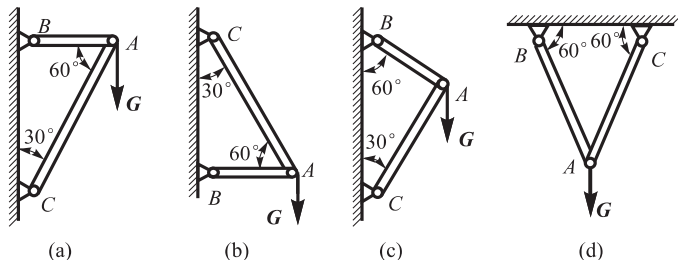
题2图 起吊构件

3. 托架制成题3图所示三种形式。已知 $F = 1\,000 \text{ N}$, $AC = CB = AD$ 。试分别就三种情况计算出 A 点的约束力的大小与方向。



题3图 支架

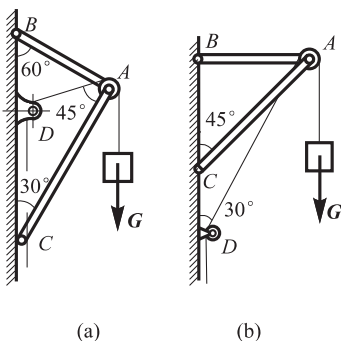
4. 题4图所示三角支架由杆 AB , AC 铰接而成, 在 A 处作用有重力 $G = 2 \text{ kN}$, 分别求出图中情况下杆 AB , AC 所受的力 (不计杆自重)。



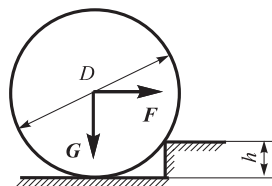
题4图 三角支架

5. 题5图所示简易起重机用钢丝绳吊起重力 $G = 2 \text{ kN}$ 的重物, 不计杆件自重、摩擦及滑轮大小, A , B , C 三处简化为铰链连接。求杆 AB 和 AC 所受的力。

6. 题6图所示电缆盘重 $G = 10 \text{ kN}$, 直径 $D = 1.2 \text{ m}$, 在水平方向加一拉力 F , 使其超过 $h = 0.2 \text{ m}$ 的台阶。试求:

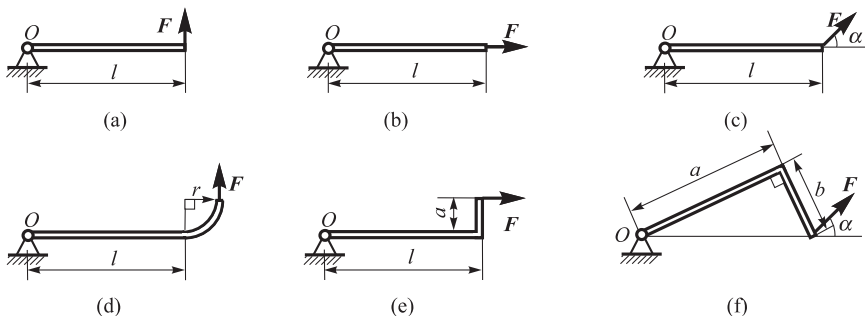


题5图 简易起重机



题6图 电缆盘

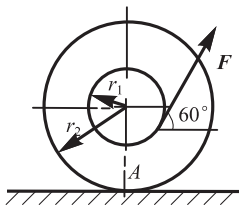
- (1) 力 F 之最小值；
 (2) 若力 F 方向可变，则要使缆盘能过此台阶的力 F 为最小值时，确定它的大小和方向。
7. 计算题7图所示各图中力 F 对 O 点之矩。



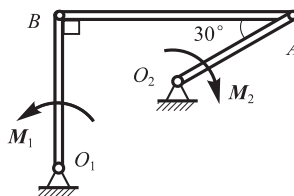
题7图 求力矩

8. 如题8图所示力 $F = 300 \text{ N}$, $r_1 = 20 \text{ cm}$, $r_2 = 50 \text{ cm}$, 试求力 F 对点 A 之矩。

9. 铰链四连杆机构 O_1ABO_2 在题9图所示位置平衡, 已知 $\overline{O_2A} = 0.4 \text{ m}$, $\overline{O_1B} = 0.6 \text{ m}$, 作用在曲柄 O_2A 上的力偶矩 $M_2 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$, 不计杆重, 求力偶矩 M_1 的大小及连杆 AB 的受力。



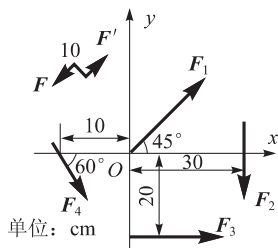
题8图 求力矩



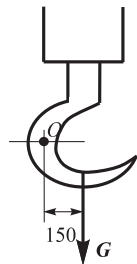
题9图 四杆机构

10. 分析题 10 图所示平面一般力系向点 O 简化的结果。已知: $F_1 = 100 \text{ N}$, $F_2 = 150 \text{ N}$, $F_3 = 200 \text{ N}$, $F_4 = 250 \text{ N}$, $F = F' = 250 \text{ N}$ 。

11. 题 11 图所示起重吊钩, 若吊钩点 O 处所承受的力偶矩最大值为 $5 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 则起吊重量不能超过多少?

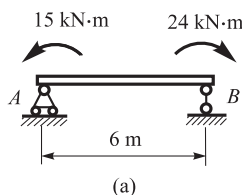


题 10 图 平面一般力系简化

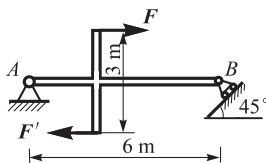


题 11 图 吊钩

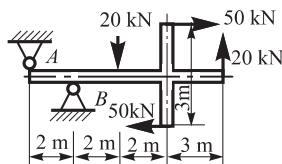
12. 构件的支承及载荷情况如题 12 图所示 ($F = 10 \text{ kN}$), 求支座 A , B 处的约束力。



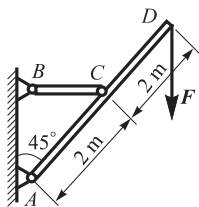
(a)



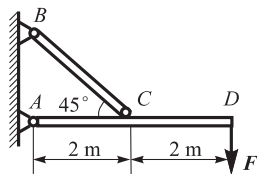
(b)



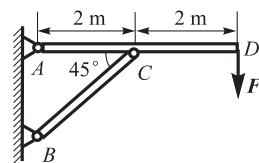
(c)



(d)



(e)



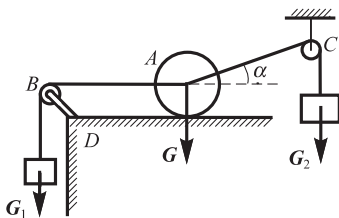
(f)

题 12 图 支座反力

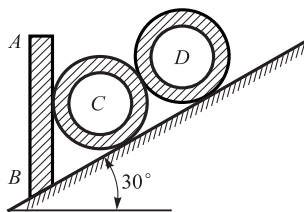
13. 题 13 图所示圆柱 A 重力为 G , 在中心上系有两绳 AB 和 AC , 绳分别绕过光滑的滑轮 B 和 C , 并分别悬挂重力为 G_1 和 G_2 的物体, 设 $G_2 > G_1$ 。试求平衡时的 α 角和水平面 D 对圆柱的约束力。

14. 相同的两圆管置于斜面上, 并用一铅垂挡板 AB 挡住, 如题 14 图所示。每根圆管重 4 kN , 求挡板所受的压力。若改用垂直于斜面上挡板, 这时压力有何变化?

15. 高炉加料小车如题 15 图所示。小车及料共重 $G = 240 \text{ kN}$, 重心在 C 点, 已知 $a = 100 \text{ cm}$, $b = 140 \text{ cm}$, $e = 100 \text{ cm}$, $d = 140 \text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$ 。求钢索拉力 T 及轮 A , B 处所受的约束力。



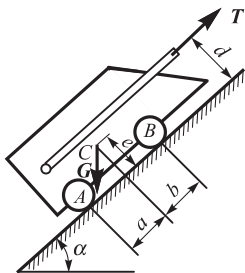
题13图 求反力



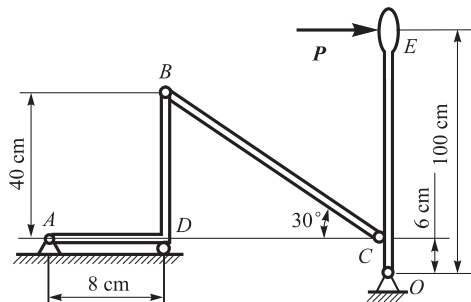
题14图 求压力

16. 钢筋校直机构如题16图所示，如在 E 点作用水平力 $P=90\text{ N}$ ，试求在 D 处将产生多大的压力，并求铰链支座 A 的约束力。

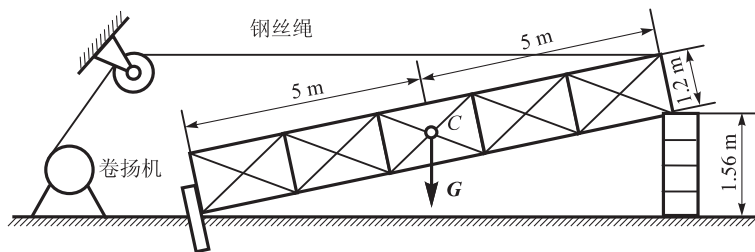
17. 起重工人为了把高 10 m 、宽 1.2 m 、重 $G=20\text{ kN}$ （重心在 C 点）的塔架立起来，首先用垫块将其一端垫高 1.56 m ，而在其另一端用桩柱顶住塔架以防滑动，然后再用卷扬机拉起塔架，如题17图所示。试求当钢丝绳处于水平位置时，钢丝绳的拉力需要多大，才能把塔架拉起来？并求此时桩柱的约束力。又若钢丝绳承受的拉力为 40 kN ，为拉起塔架又不致将钢丝绳拉断，则至少应将塔架垫起多高？



题15图 加料小车

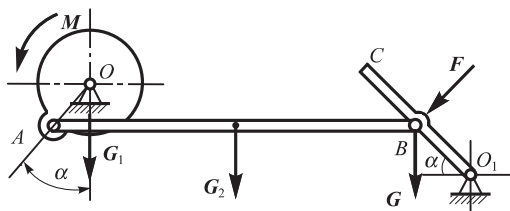


题16图 钢筋校直机构



题17图 拉起塔架

18. 题18图所示为小型推料机的简图。电机转动曲柄 OA ，靠连杆 AB 使推料板 O_1C 绕



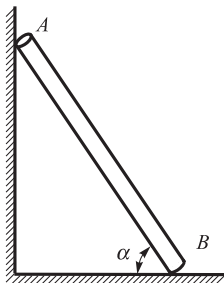
题18图 小型推料机

轴 O_1 转动, 便将物料推到运输机上。已知装有销钉 A 的圆盘重 $G_1 = 200 \text{ N}$, 均质杆 AB 重 $G_2 = 300 \text{ N}$, 推料板 O_1C 重 $G = 600 \text{ N}$ 。设料作用于推料板 O_1C 上 B 点的力 $F = 1000 \text{ N}$, 且与板垂直, $\overline{OA} = 0.2 \text{ m}$, $\overline{AB} = 2 \text{ m}$, $\overline{BO_1} = 0.4 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ$ 。若在图示位置机构处于平衡, 求作用曲柄 OA 上之力偶矩 M 的大小。

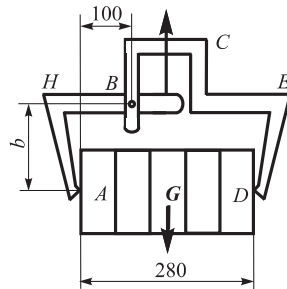
19. 题19图所示梯子 AB 重力为 $G = 200 \text{ N}$, 靠在光滑墙上, 梯子长为 $l = 3 \text{ m}$, 已知梯子与地面间的静摩擦因数为 0.25 , 今有一重力 650 N 的人沿梯子向上爬, 若 $\alpha = 60^\circ$, 求人能够达到的最大高度。

20. 砖夹宽 280 mm , 爪 AHB 与 $BCED$ 在 B 点处铰接, 尺寸如题20图所示。被提起的砖重力为 G , 提举力 F 作用在砖夹中心线上。若砖夹与砖之间的静摩擦因数 $f_s = 0.5$, 则尺寸 b 应为多大, 才能保证砖被夹住不滑掉?

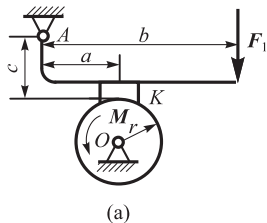
21. 有三种制动装置如题21图所示。已知圆轮上转矩为 M , 几何尺寸 a , b , c 及圆轮同制动块 K 间的静摩擦因数 f_s 。试求制动所需的最小力 F 的大小。



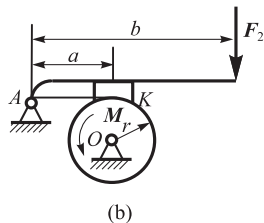
题19图 梯子



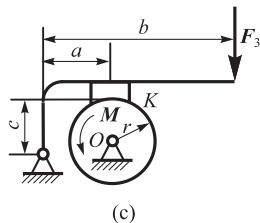
题20图 砖夹



(a)



(b)



(c)

题21图 三种制动装置

第 3 章 空间力系的合成与平衡

本章知识点

- 1. 力在空间直角坐标轴上的投影
- 2. 合力投影定理
- 3. 力对轴之矩
- 4. 空间力系平衡条件及平衡问题的求解方法
- 5. 重心及求解方法

先导案例

一盏灯挂在由三根杆所组成的支架上,如图 3-1 所示。上面的两根杆 AC 和 AD 与在墙上支点间的连线 CD 构成一个等边三角形,这个三角形的平面跟第三根杆 AB 垂直, AB 杆跟墙面成 30° 角。三根杆重力不计,灯的重力为 G ,如何求这三根杆所受力的

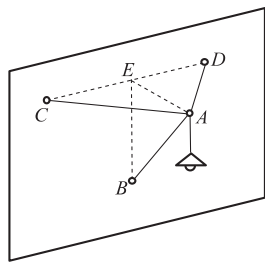


图 3-1 吊灯

若力系中各力的作用线不在同一平面内,该力系就称为空间力系。

空间力系按各力作用线的相对位置,又可分为空间汇交力系、空间平行力系和空间任意力系。在机械工程中,机械或零、部件的几何形体都是立体的,一般所作用的力系都是空间状态。图 3-2、图 3-3 所示各构件均为受空间力系作用的情况。

本章将讨论空间力系问题的理论基础,即力在空间直角坐标轴上的投影及力对轴之矩的概念与运算,对空间任意力系问题的平衡计算,物体重心的概念及重心位置的求解方法。

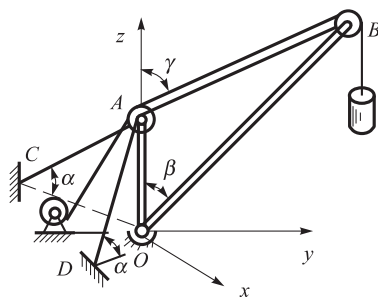


图 3-2 桅杆起重机

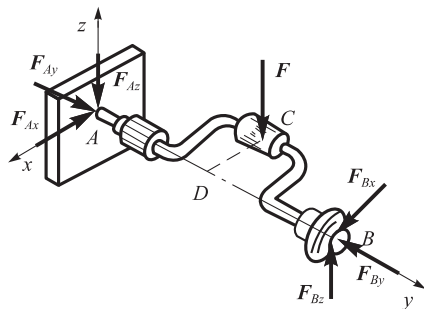


图 3-3 手摇钻

3.1 力在空间直角坐标轴上的投影

力在空间坐标轴上投影的概念与力在平面坐标轴上投影的概念相同, 由于力所对应的参考系不同, 故计算方法有所不同。力在空间坐标轴上的投影有两种方法, 即直接投影法和二次投影法。

3.1.1 直接投影法

当力 $\boldsymbol{F}$ 在空间的方位直接采用 $\boldsymbol{F}$ 与 x, y, z 坐标轴之夹角 α, β, γ 表示时 (图 3-4), 则力 $\boldsymbol{F}$ 在直角坐标轴上的投影可表示为

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha \\ F_y &= F \cos \beta \\ F_z &= F \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

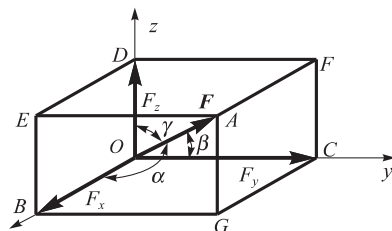


图 3-4 空间力的表示

各轴的投影方向与所对应轴的正向一致时取正号, 反之取负号。

3.1.2 二次投影法

若力在空间的方位采用力与任一坐标轴 (如 z 轴) 的夹角 γ 及力在垂直于此轴 (z 轴) 的坐标平面 (xy 面) 上的投影与另一轴的夹角 φ 表示, 如图 3-5 所示。则可先求出力 $\boldsymbol{F}$ 在 xy 平面上的投影 $\boldsymbol{F}_{xy}$, 然后, 再将 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 分别投影到 x, y 轴上, 求出力 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴上的投影。此法称为二次投影法。

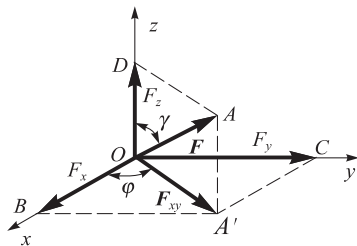


图 3-5 空间力的投影

应用二次投影法的过程可作如下归纳。

$$\mathbf{F} \Rightarrow \begin{cases} F_z = F \cdot \cos \gamma \\ F_{xy} = F \cdot \sin \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = F_{xy} \cdot \cos \varphi = F \cdot \sin \gamma \cos \varphi \\ F_y = F_{xy} \cdot \sin \varphi = F \cdot \sin \gamma \sin \varphi \end{cases}$$

3.1.3 合力投影定理

设有一空间汇交力系 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$, 利用力的平行四边形法则, 可将其逐步合成为一个合力矢 $\mathbf{F}_R$, 且有

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum \mathbf{F} \quad (3-2)$$

因此有

$$\left. \begin{aligned} F_{Rx} &= \sum F_x \\ F_{Ry} &= \sum F_y \\ F_{Rz} &= \sum F_z \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

空间汇交力系的合力在某一轴上的投影, 等于力系中各力在同一轴上投影的代数和, 式 (3-3) 称为空间力系的合力投影定理。

例 3.1 在边长 $a = 150 \text{ mm}$, $b = 100 \text{ mm}$, $c = 50 \text{ mm}$ 的长方体上, 作用有三个力, 如图 3-6 所示。 $F_1 = 10 \text{ kN}$, $F_2 = 20 \text{ kN}$, $F_3 = 30 \text{ kN}$ 。试计算各力在三个坐标轴上的投影。

解: (1) 力 $\mathbf{F}_1$ 与 z 轴平行, 故直接对各轴投影有

$$F_{1x} = 0, F_{1y} = 0, F_{1z} = 10 \text{ kN}$$

(2) 力 $\mathbf{F}_2$ 与坐标平面 Oyz 平行, 故直接对各轴投影有

$$F_{2x} = 0$$

$$\begin{aligned} F_{2y} &= -F_2 \cdot \cos \beta = -F_2 \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \\ &= -20 \text{ kN} \times \frac{150}{\sqrt{150^2 + 50^2}} = -19.0 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$F_{2z} = F_2 \sin \beta = F_2 \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 20 \text{ kN} \times \frac{50}{\sqrt{150^2 + 50^2}} = 6.32 \text{ kN}$$

(3) 力 $\mathbf{F}_3$ 为空间力, 所在平面 $ABCD$ 与坐标平面 Oyz 相垂直, 故应用二次投影法求解。

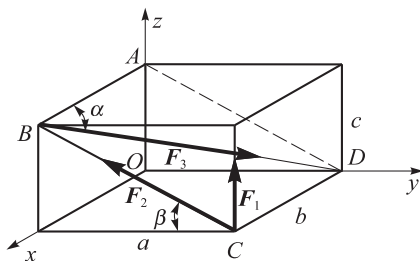


图 3-6 求力的投影

首先将力 F_3 在与平面 $ABCD$ 平行的 x 轴上和平面 Oyz 上投影, 有

$$\begin{aligned} F_{3x} &= -F_3 \cdot \cos \alpha = -F_3 \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= -30 \text{ kN} \times \frac{100}{\sqrt{150^2 + 100^2 + 50^2}} = -16.0 \text{ kN} \\ F_{3yz} &= F_3 \cdot \sin \alpha = F_3 \cdot \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= 30 \text{ kN} \times \frac{\sqrt{150^2 + 50^2}}{\sqrt{150^2 + 100^2 + 50^2}} = 25.4 \text{ kN} \end{aligned}$$

再将力 F_{3yz} 投影到 y 轴和 z 轴上, 有

$$\begin{aligned} F_{3y} &= F_{3yz} \cdot \cos \beta = F_{3yz} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 25.4 \text{ kN} \times \frac{150}{\sqrt{150^2 + 50^2}} = 24.1 \text{ kN} \\ F_{3z} &= F_{3yz} \cdot \sin \beta = F_{3yz} \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 25.4 \text{ kN} \times \frac{50}{\sqrt{150^2 + 50^2}} = 8.03 \text{ kN} \end{aligned}$$

3.2 力对轴之矩

在第2章力偶理论中已提到力对物体有两种作用, 一种是使物体绕矩心转动的附加力偶, 附加力偶的值等于力对点之矩。因此, 可以认为力对点之矩就是力使物体绕矩心转动作用的一种度量。

3.2.1 力对轴之矩

从空间的角度来看, 对一个与 z 轴不共面的力 F , 可将力 F 分解为两个分力, 一个为平行于 z 轴方向的分力 F_z , 另一个为在垂直于 z 轴平面上的分力 F_{xy} 。这样就将力 F 中对轴无矩的成分与有矩的成分分离开来 (图 3-7 (a))。由于 F_z 对 z 轴无矩, 所以力 F 对 z 轴的力矩就只等于 F_{xy} 对轴的力矩, 而 F_{xy} 对 z 轴的力矩就是 F_{xy} 力对 O 点之矩。故

$$M_z(F) = M_z(F_{xy}) = M_O(F_{xy}) = F_{xy} \cdot d = \pm F \cdot \cos \alpha \cdot d \quad (3-4)$$

综上所述, 力使刚体绕一轴转动效应的度量称为力对该轴之矩, 简称力对轴之矩。它等于此力在垂直于该轴平面上的投影对该轴与此平面的交点之矩 (图 3-7 (b))。记作 $M_z(F)$, 下标 z 表示取矩的轴, 力对轴之矩的单位为 $\text{N} \cdot \text{m}$ 或 $\text{kN} \cdot \text{m}$ 。

力对轴之矩的符号可用右手定则来判定: 用右手握住 z 轴, 使四指指向力矩的转向, 若此时大拇指指向 z 轴的正向, 则力矩为正; 反之则为负。

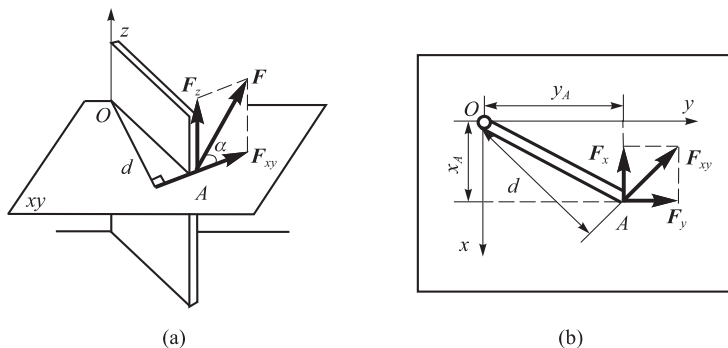


图 3-7 力对轴之矩

3.2.2 合力矩定理

在平面力系中,推证过的合力矩定理,在空间力系中也仍然适用,即力 $\boldsymbol{F}$ 对某轴(例如如图 3-7 中 z 轴)的力矩,为力 $\boldsymbol{F}$ 在 x, y, z 三个坐标方向的分力 $\boldsymbol{F}_x, \boldsymbol{F}_y, \boldsymbol{F}_z$ 对同轴(z 轴)力矩的代数和。

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_z(\boldsymbol{F}_x) + M_z(\boldsymbol{F}_y) + M_z(\boldsymbol{F}_z) \quad (3-5)$$

因分力 $\boldsymbol{F}_z$ 平行于 z 轴,故 $M_z(\boldsymbol{F}_z) = 0$, 于是

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_z(\boldsymbol{F}_x) + M_z(\boldsymbol{F}_y) = F_y \cdot x_A - F_x \cdot y_A \quad (3-6a)$$

同理可得

$$M_x(\boldsymbol{F}) = M_x(\boldsymbol{F}_y) + M_x(\boldsymbol{F}_z) = F_z \cdot y_A - F_y \cdot z_A \quad (3-6b)$$

$$M_y(\boldsymbol{F}) = M_y(\boldsymbol{F}_z) + M_y(\boldsymbol{F}_x) = F_x \cdot z_A - F_z \cdot x_A \quad (3-6c)$$

应用上式时,投影 F_x, F_y, F_z 及坐标 x_A, y_A, z_A 均应考虑本身的正负号,所得力矩的正负号亦将表明力矩绕轴的转向。

例 3.2 若已知条件与例 3.1 相同,试求力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ 对 x, y, z 轴之矩。

解: 有关力的投影在例 3.1 中已经求出,则据式(3-6)有

$$M_x(\boldsymbol{F}_1) = F_1 \cdot a = 10 \text{ kN} \times 150 \text{ mm} = 1\,500 \text{ kN} \cdot \text{mm} = 1.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_y(\boldsymbol{F}_1) = -F_1 \cdot b = -10 \text{ kN} \times 100 \text{ mm} = -1\,000 \text{ kN} \cdot \text{mm} = -1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_z(\boldsymbol{F}_1) = 0 \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

$$M_x(\boldsymbol{F}_2) = F_{2z} \cdot a = 6.32 \text{ kN} \times 150 \text{ mm} = 948 \text{ kN} \cdot \text{mm} = 0.948 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_y(\boldsymbol{F}_2) = -F_{2z} \cdot b = -6.32 \text{ kN} \times 100 \text{ mm} = -632 \text{ kN} \cdot \text{mm} = -0.632 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_z(\boldsymbol{F}_2) = F_{2y} \cdot b = -19 \text{ kN} \times 100 \text{ mm} = -1\,900 \text{ kN} \cdot \text{mm} = -1.9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

3.3 空间任意力系的平衡方程

空间任意力系的平衡条件也是通过力系的简化得出的。和平面任意力系相仿,空间任意力系也可简化为主矢和主矩,当主矢和主矩都等于零时力系平衡。由此而导出的空间任意力系的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \sum M_x(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_y(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_z(\mathbf{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

式(3-7)表明空间任意力系平衡的必要与充分条件是:各力在三个坐标轴上的投影的代数和以及各力对此三轴之矩的代数和都等于零。

式(3-7)有六个独立的平衡方程,可以解六个未知量,它是解决空间力系平衡问题的基本方程。

由式(3-7)可得出空间任意力系的特殊情况下的平衡方程式如下。

空间汇交力系

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-8)$$

空间平行力系(设各力与 z 轴平行)

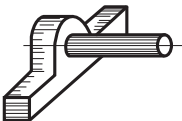
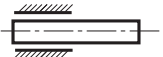
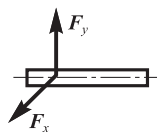
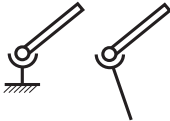
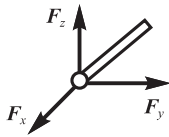
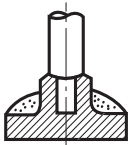
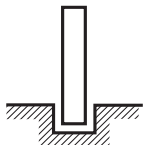
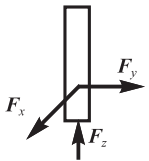
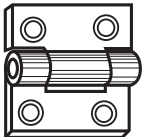
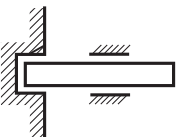
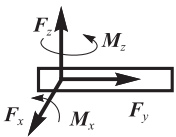
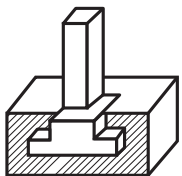
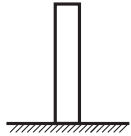
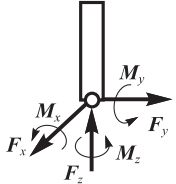
$$\begin{aligned} \sum F_z &= 0 \\ \sum M_x(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_y(\mathbf{F}) &= 0 \end{aligned} \quad (3-9)$$

求解空间力系的平衡问题基本方法与步骤同平面力系问题相同。即

- (1) 确定研究对象,取分离体,画受力图。
- (2) 确定力系类型,列出平衡方程。
- (3) 代入已知条件,求解未知量。

正确地取出分离体,画受力图是解决问题的关键,表3-1列出了空间常见的约束类型及约束力的表示法。

表 3-1 空间常见约束及约束力

约束类型	约束简图	简化符号	约束力图示
向心滚子轴承 径向滑动轴承			
球形铰链			
向心推力轴承 径向止推轴承			
柱销铰链			
空间固定端			

例 3.3 一三角吊架由球铰结构连接而成,如图 3-8(a)所示。悬挂物体重为 $G=100\text{ kN}$,吊架三根杆与吊索的夹角均为 30° ,与地面的夹角均为 60° ,不计杆自重, $\triangle ABC$ 为正三角形。试求三杆受力。

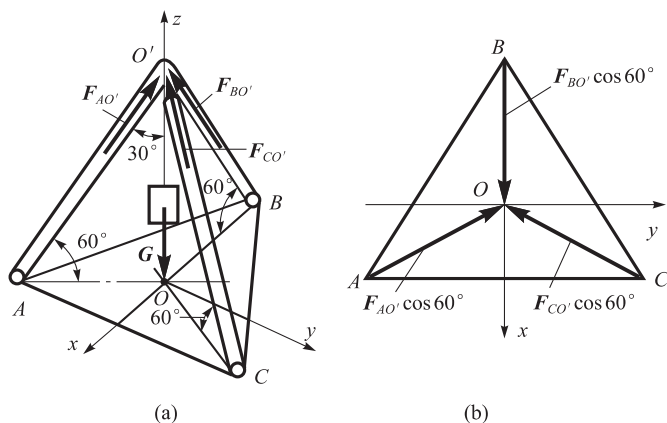


图 3-8 三角吊架

解: 取顶点球铰及重物为研究对象, 三杆均为二力杆, 画受力在原图上, 如图 3-8 (a) 所示。\$O'\$ 铰受力 \$\mathbf{G}\$, \$\mathbf{F}_{AO'}\$, \$\mathbf{F}_{BO'}\$, \$\mathbf{F}_{CO'}\$ 组成空间汇交力系。

取坐标系 \$Oxyz\$, 各力在 \$Oxy\$ 平面内的投影如图 3-8 (b) 所示, 列平衡方程如下。

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{AO'} \cdot \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ - F_{CO'} \cdot \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + F_{BO'} \cdot \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{AO'} \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ - F_{CO'} \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_z = 0, \quad F_{AO'} \cdot \cos 30^\circ + F_{CO'} \cdot \cos 30^\circ + F_{BO'} \cdot \cos 30^\circ - G = 0$$

解得

$$F_{AO'} = F_{BO'} = F_{CO'} = \frac{G}{3 \cos 30^\circ} = \frac{100 \text{ kN}}{3 \cos 30^\circ} = 38.5 \text{ kN}$$

例 3.4 三轮推车如图 3-9 所示。若已知 \$AF = FB = 0.5 \text{ m}\$, \$CF = 1.5 \text{ m}\$, \$EF = 0.3 \text{ m}\$, \$ED = 0.5 \text{ m}\$, 载重 \$G = 1.5 \text{ kN}\$。试求 \$A\$, \$B\$, \$C\$ 三轮所受的压力。

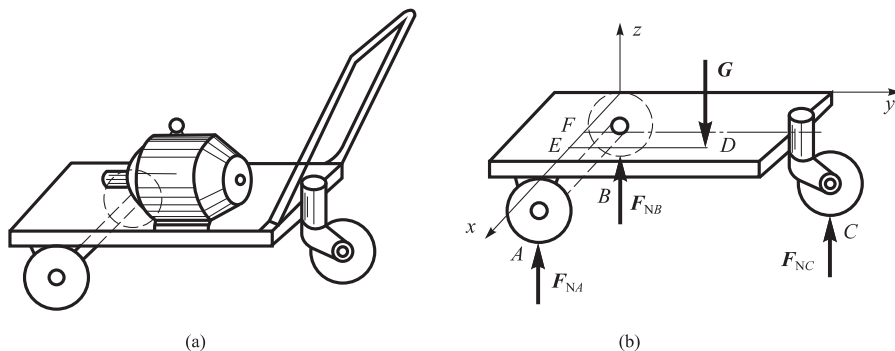


图 3-9 三轮推车

解: (1) 取小车为研究对象, 并作出其分离体受力图, 如图 3-9 (b) 所示。车板受已知载荷 G 及未知的 A, B, C 三轮之约束力 F_{NA}, F_{NB}, F_{NC} 作用, 这些力的作用线相互平行, 构成一个空间平行力系。

(2) 按力作用线的方向与几何位置, 取 z 轴为纵坐标, 车板为 xy 平面, B 为坐标原点, BA 为 x 轴。

(3) 列平衡方程式求解。

$$\sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0, F_{NC} \cdot FC - G \cdot ED = 0$$

得
$$F_{NC} = G \cdot \frac{ED}{FC} = 1.5 \text{ kN} \times \frac{0.5 \text{ m}}{1.5 \text{ m}} = 0.5 \text{ kN}$$

$$\sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0, G \cdot EB - F_{NC} \cdot FB - F_{NA} \cdot AB = 0$$

得
$$F_{NA} = \frac{G \cdot EB - F_{NC} \cdot FB}{AB} = \frac{1.5 \text{ kN} \times 0.8 \text{ m} - 0.5 \text{ kN} \times 0.5 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 0.95 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 0, F_{NA} + F_{NB} + F_{NC} - G = 0$$

得
$$F_{NB} = G - F_{NA} - F_{NC} = 1.5 \text{ kN} - 0.95 \text{ kN} - 0.5 \text{ kN} = 0.05 \text{ kN}$$

若重物放置过偏, 致使 F_{NB} 为零或负值, 则小车将绕 AC 线而翻倒。

例 3.5 如图 3-10 所示, 悬臂刚性架上作用有分别平行于 AB, CD 的力 P 与 Q , 已知 $P = 5 \text{ kN}, Q = 4 \text{ kN}$, 若刚性架自重不计, 求固定端 O 处的约束力及约束力偶。

解: 取悬臂刚架为研究对象, 画受力图。选取坐标系 $Oxyz$, 如图 3-10 所示, 据题意知, Q 在 Oxy 平面内且平行于 y 轴, P 在 Oxz 平面内且平行于 x 轴, 基础对悬臂刚架的约束力为 F_x, F_y, F_z , 约束力偶矩为 M_x, M_y, M_z , 约束力与约束力偶均设为正向, 这些力组成空间任意力系。列出如下平衡方程

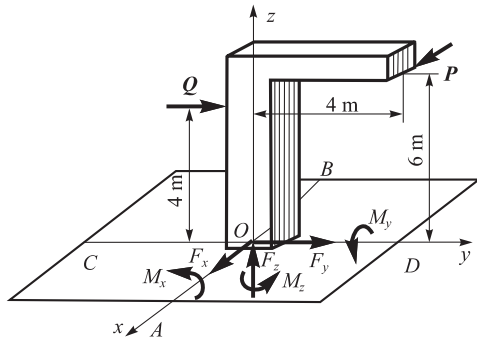


图 3-10 悬臂刚性架

$$\sum F_x = 0, F_x + P = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_y + Q = 0$$

$$\sum F_z = 0, F_z = 0$$

$$\sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0, M_x - Q \cdot 4 \text{ m} = 0$$

$$\sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0, M_y - P \cdot 6 \text{ m} = 0$$

$$\sum M_z(\boldsymbol{F}) = 0, M_z - P \cdot 4 \text{ m} = 0$$

解得

$$\begin{cases} F_x = -5 \text{ kN} \\ F_y = -4 \text{ kN} \\ F_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} M_x = 16 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_y = -30 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_z = 20 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{cases}$$

正号表示约束力、约束力偶的假设方向与实际方向一致, 负号表示方向相反。

例 3.6 一车床的主轴如图 3-11 (a) 所示, 齿轮 C 的直径为 200 mm, 卡盘 D 夹住一直径为 100 mm 的工件, A 为向心推力轴承, B 为向心轴承。切削时工件匀速转动, 车刀给工件的切削力 $F_x = 466 \text{ N}$, $F_y = 352 \text{ N}$, $F_z = 1\,400 \text{ N}$, 齿轮 C 在啮合处受力为 F , 作用在齿轮的最低点 (图 3-11 (b))。不考虑主轴及其附件的重量与摩擦, 试求力 F 的大小及 A, B 处的约束力。

解: 选取主轴及工件为研究对象, 画受力图 (图 3-11 (c))。向心轴承 B 的约束力为 F_{Bx} 和 F_{Bz} , 向心推力轴承 A 处约束力为 F_{Ax} , F_{Ay} , F_{Az} 。主轴及工件共受九个力作用, 为空间任意力系。对于空间力系的解法有两种: 一是直接应用空间力系平衡方程求解; 第二种方法是将空间力系转化为平面力系求解。本题分别用两种方法求解。

方法一 如图 3-11 (b), (c) 所示, 据式 (3-7) 可列出如下方程。

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} + F_{Bx} - F_x - F \cos 20^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0, F_{Az} + F_{Bz} + F_z + F \cos 20^\circ = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0, F_{Bz} \cdot 0.2 \text{ m} + F_z \cdot 0.3 \text{ m} - F \cos 20^\circ \cdot 0.05 \text{ m} = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0, -F_z \cdot 0.05 \text{ m} + F \cos 20^\circ \cdot 0.1 \text{ m} = 0$$

$$\sum M_z(F) = 0, -F \cos 20^\circ \cdot 0.05 \text{ m} - F_{Bx} \cdot 0.2 \text{ m} + F_x \cdot 0.3 \text{ m} - F_y \cdot 0.05 \text{ m} = 0$$

解得

$$F_{Ax} = 730 \text{ N} \quad F_{Ay} = 352 \text{ N} \quad F_{Az} = 381 \text{ N}$$

$$F_{Bx} = 436 \text{ N} \quad F_{Bz} = -2\,036 \text{ N} \quad F = 745 \text{ N}$$

直接利用空间力系平衡方程求解时, 关键在于正确地计算出力在轴上的投影和力对轴之矩。用此法时, 若力较多, 则容易出错。这时可采用第二种方法求解。

方法二 首先将图 3-11 (c) 中空间力系分别投影到三个坐标平面内, 如图 3-11 (d), (e), (f) 所示。然后分别列出各投影平面上的力系相应的平衡方程式, 再联立解出未知量。具体步骤如下。

(1) 在 Axz 平面内, 如图 3-11 (d) 所示。由

$$\sum M_A(F) = 0, \quad F_1 \cdot 0.1 \text{ m} - F_z \cdot 0.05 \text{ m} = 0$$

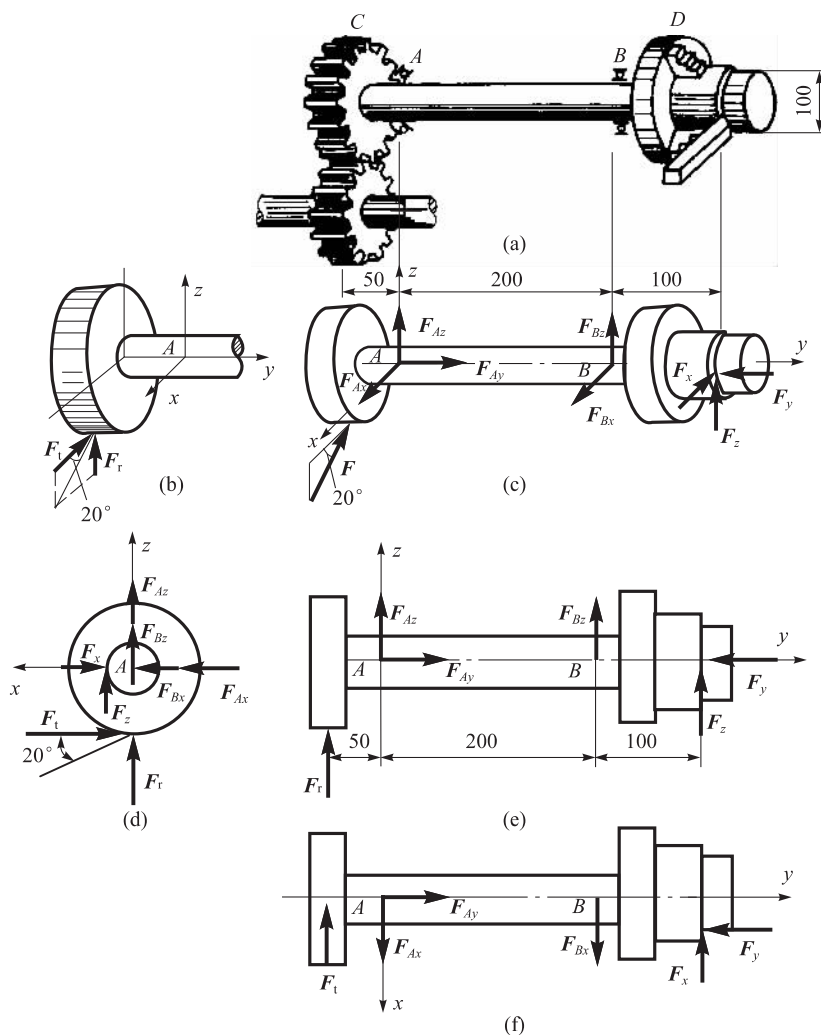


图 3-11 车床主轴受力分析

将 $F_t = F \cos 20^\circ$ 代入得

$$F = 745 \text{ N}$$

(2) 在 Ayz 平面内, 如图 3-11 (e) 所示。由

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, \quad -F_r \times 0.05 \text{ m} + F_{Bz} \cdot 0.2 \text{ m} + F_z \times 0.3 \text{ m} = 0$$

将 $F_r = F \sin 20^\circ$ 代入得

$$F_{Bz} = -2\,036 \text{ N}$$

由
得
由

$$\sum F_z = 0, \quad F_{Az} + F_{Bz} + F_z + F_r = 0$$

$$F_{Az} = 381 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - F_y = 0$$