

第2章 直流电路分析

【学习要点】

本章主要介绍直流电路的三大基本分析方法:网络的等效变换法(无源等效和有源等效)、网络的方程法(支路电流法和节点电位法)和网络的定理法(叠加定理和戴维南定理)。这三大分析方法是电路分析的最基本方法,既可以用在直流电路中,也可以用在交流电路中。

2.1 电路的简化及等效变换

如果电路中的某一部分只有两个端钮与其他部分相连,则这部分电路称为二端网络或二端电路。如图 2-1(a)所示,方框内的字母“N”代表网络(network);网络内含有电源时,称为含源(active)二端网络,方框内字母用“A”表示,如图 2-1(b)所示;网络内未含电源时,称为无源(passive)二端网络,方框内字母用“P”表示,如图 2-1(c)所示。

图 2-1 中所标的电压、电流称为端口电压和端口电流,这两者之间的关系称为二端网络的伏安特性。

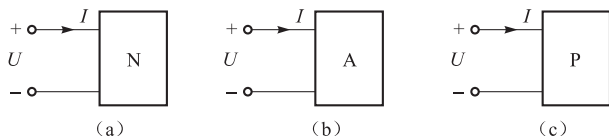


图 2-1 二端网络电路

在分析复杂网络时,为了分析与计算的方便,应首先对电路进行等效变换,以使电路简化。

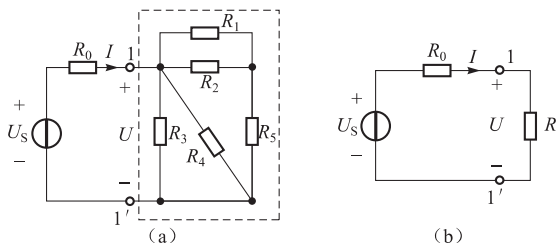


图 2-2 等效电阻

若两个网络端口的伏安关系完全相同,则这两个网络等效,即可以用一个网络代替另一个网络。所谓等效变换是对网络外部而言的,对网络内部并不等效。

例如,在图 2-2(a)、(b)中端子 1-1' 以右的部分有相同的伏安特性,即电压 U 和电流 I 对应相等。当图 2-2(a)中端子 1-1' 以右部分被 R 替代后,1-1' 以左部分

电路的任何电压和电流都将维持与原电路相同,这就是电路的等效变换概念。

电阻 R 称为等效电阻,其值决定于被替代的原电路中各电阻的值以及它们的联接方式。

用等效变换的方法求解电路时,电压和电流保持不变的部分仅限于等效电路以外,这就是对外等效的概念。如图 2-2(a)所示电路被简化后,可按图 2-2(b)求得 U 和 I ,它们分别等于原电路中的 U 和 I 。但如果要求得图 2-2(a)中虚线框内的各电阻的电流,就必须回到原电路,根据已求得的 U 和 I 求解。

2.1.1 电阻的串、并联等效变换

如图 2-3 所示, n 个电阻联接成一串,中间没有分支,叫做电阻的串联。

由基尔霍夫定律和欧姆定律可知:

(1) 串联的各电阻上电流相等。

(2) 串联电路的总电压等于各电阻上的电压之和,即

$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n \quad (2-1)$$

(3) 串联电路的总电阻等于各电阻的阻值之和,即

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n \quad (2-2)$$

(4) 串联电路中各电阻的电压与其阻值成正比关系,即

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= R_1 I = \frac{R_1}{R} U \\ U_2 &= R_2 I = \frac{R_2}{R} U \\ &\vdots \\ U_n &= R_n I = \frac{R_n}{R} U \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

上式即为电阻串联的分压公式。

(5) 串联电路中电阻的功率与其阻值成正比关系,即

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= U_1 I = R_1 I^2 \\ P_2 &= U_2 I = R_2 I^2 \\ &\vdots \\ P_n &= U_n I = R_n I^2 \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

如图 2-4 所示, n 个电阻一端接在一起,另一端也接在一起,叫做电阻的并联。

由基尔霍夫定律和欧姆定律可知:

(1) 并联各电阻上的电压相等。

(2) 并联电路的总电流等于各电阻电流之和,即

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n \quad (2-5)$$

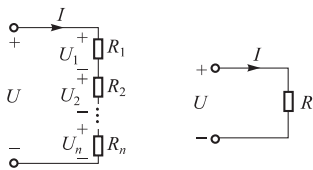


图 2-3 电阻的串联

(3) 并联电路的总电导等于各支路的电导之和,即

$$G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n \text{ 或}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \quad (2-6)$$

(4) 并联电路各电阻的电流与其阻值成反比关系,即

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{U}{R_1} = \frac{R}{R_1} I \\ I_2 &= \frac{U}{R_2} = \frac{R}{R_2} I \\ &\vdots \\ I_n &= \frac{U}{R_n} = \frac{R}{R_n} I \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

上式即为电阻并联的分流公式。

(5) 并联电路中各电阻的功率与其阻值成反比关系,即

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= UI_1 = \frac{U^2}{R_1} \\ P_2 &= UI_2 = \frac{U^2}{R_2} \\ &\vdots \\ P_n &= UI_n = \frac{U^2}{R_n} \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

在电路中,既有电阻的串联,又有电阻的并联,叫做电阻的混联。

分析混联电路时,必须先分清哪些电阻是串联,哪些电阻是并联,再根据电阻串、并联的特点把混联电路等效为简单电路,从而简化电路的分析。

例 2-1 求图 2-5(a)所示电路 a、b 两端等效电阻的表达式。

解 由图可知,电阻 R_4 被短路,因此,图 2-5(a)可改画成图 2-5(b),从而能很明显地看出电阻的串、并联关系。

$$R_{ab} = R_1 // R_2 // R_3 + R_5$$

其中符号“//”表示并联,在计算时“//”比“+”的优先级高。

* 2.1.2 星形和三角形的等效变换

有些电阻电路,电阻既不是串联也不是并联,因此无法用电阻的串、并联公式进行等效化简。这时,常用的就是星形和三角形的等效变换。

三个电阻的一端联接在一起,另一端分别与外电路的三个节点相连,构成星形联接,又称为 Y 形联接,如图 2-6(a)所示。三个电阻首尾相连,构成三角形联接,又称为 $\triangle$ 联接,如图

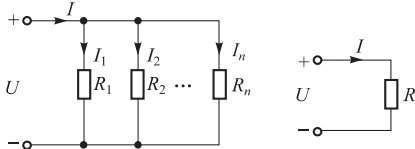


图 2-4 电阻的并联

2-6(b)所示。

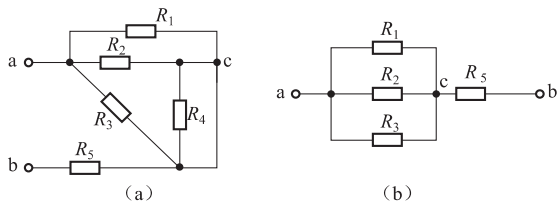


图 2-5 例 2-1 图

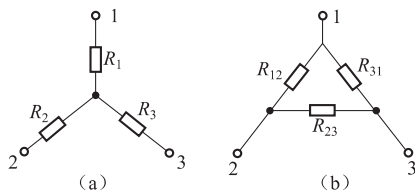


图 2-6 星形和三角形联接

星形联接和三角形联接彼此互相等效的条件是:对任意两节点而言的伏安特性相同,则这两种电路等效。

可以证明,星形联接和三角形联接电路的等效变换条件是:

(1) 将三角形等效变换为星形($\Delta \rightarrow Y$)

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

由式(2-9)可看出

$$Y \text{ 形电阻} = \frac{\Delta \text{形相邻电阻的乘积}}{\Delta \text{形电阻之和}}$$

(2) 将星形等效变换为三角形($Y \rightarrow \Delta$):

$$\left. \begin{aligned} R_{12} &= \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_3} = R_1+R_2+\frac{R_1R_2}{R_3} \\ R_{23} &= \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1} = R_2+R_3+\frac{R_2R_3}{R_1} \\ R_{31} &= \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_2} = R_3+R_1+\frac{R_3R_1}{R_2} \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

由式(2-10)可看出

$$\Delta \text{形电阻} = \frac{Y \text{形相阻两两乘积之和}}{Y \text{形不相邻电阻}}$$

若 Δ 形(或 Y 形)联接的三个电阻相等,则等效变换后的 Y 形(或 Δ 形)联接的三个电阻也相等。设三个电阻 $R_{12}=R_{23}=R_{31}=R_{\Delta}$,则等效 Y 形的三个电阻为

$$R_Y = R_1 = R_2 = R_3 = \frac{R_{\Delta}}{3}$$

反之

$$R_{\Delta} = R_{12} = R_{23} = R_{31} = 3R_Y$$

例 2-2 电路如图 2-7(a)所示,已知 $R_1=3\ \Omega$, $R_2=5\ \Omega$, $R_3=2\ \Omega$, $R_4=1.4\ \Omega$, $R_5=1\ \Omega$, $U_S=10\text{ V}$,求电流 I 。

解 将 R_1 、 R_2 和 R_3 三个电阻构成的 $\triangle$ 形联接等效变换为 Y 形联接,如图 2-7(b)所示,且等效关系为

$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{3 \times 5}{3 + 5 + 2} = 1.5\ \Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{3 \times 2}{3 + 5 + 2} = 0.6\ \Omega$$

$$R_C = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{5 \times 2}{3 + 5 + 2} = 1\ \Omega$$

再利用电阻的串、并联公式,可得

$$\begin{aligned} R &= R_A + (R_B + R_4) // (R_C + R_5) \\ &= 1.5 + (0.6 + 1.4) // (1 + 1) = 2.5\ \Omega \end{aligned}$$

因此

$$I = \frac{U_S}{R} = \frac{10}{2.5} = 4\text{ A}$$

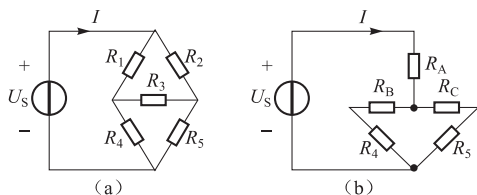


图 2-7 例 2-2 图

2.1.3 含源电路的等效变换

根据理想电源的 VCR 及网络等效条件可知:电源串联或并联时,也可以用一个等效电源代替。其方法是:

(1) 当有多个电压源串联时,可等效成一个电压源,其等效电压源的源电压为多个电压源电压的代数和,如图 2-8 所示。其中, $U_S = U_{S1} + U_{S2} - U_{S3}$ 。

(2) 当有多个电流源并联时,可等效成一个电流源,其等效电流源的源电流为多个电流源电流的代数和,如图 2-9 所示。其中, $I_S = I_{S1} + I_{S2} - I_{S3}$ 。

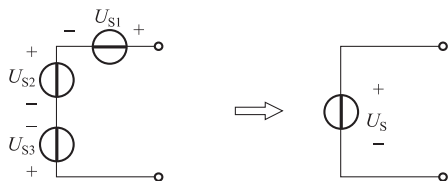


图 2-8 电压源串联

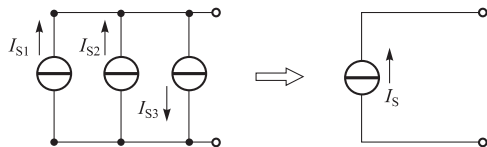


图 2-9 电流源并联

(3) 凡是与电压源并联的任意电路元件,对外等效时可省去,不影响电压源两端的输出电压,如图 2-10 所示。

(4) 凡是与电流源串联的任意电路元件,对外等效时可省去,不影响电流源的输出电流,如图 2-11 所示。

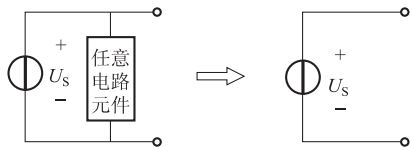


图 2-10 电压源的并联简化

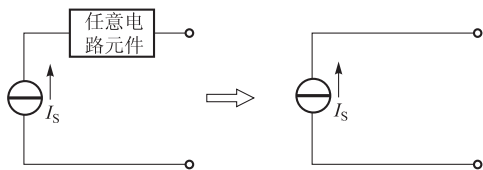


图 2-11 电流源的串联简化

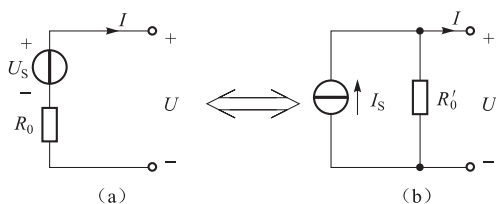


图 2-12 实际电源的等效变换

一个实际电源既可以用电压源模型来等效代替,也可以用电流源模型来等效代替,它们只是表现形式不同,但实际上它们反映的是同一个电源的伏安特性,因此这两种模型之间可以进行等效变换。其等效模型如图 2-12 所示。

由 1.5 节可知,实际电压源的 VCR 表达式为 $U = U_s - R_0 I$, 实际电流源的 VCR 表达式为 $I = I_s - \frac{U}{R'_0}$ 。根据网络的等效条件,可得实际电源等效变换的条件为

$$\left. \begin{aligned} U_s &= R_0 I_s \\ R_0 &= R'_0 \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

在进行电源的等效变换时要注意:

- (1) 等效变换仅对外电路成立,对电源内部是不等效的。
- (2) 只有实际电源之间可以进行等效变换,理想电压源与理想电流源之间不能进行等效变换,即“实际可换,理想不换”。
- (3) 变换时应注意电源的极性和方向,即电压源从负极到正极的方向与电流源电流的方向在变换前后应保持一致。

例 2-3 试将图 2-13(a)、(b)转换为电压源模型,将图 2-13(c)、(d)转换为电流源模型。

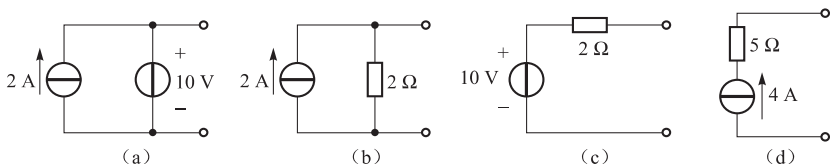


图 2-13 例 2-3 图 1

解 图 2-13(a)中,电压源的电压为 10 V,对外电路而言,与之并联的电流源在等效时可省去,故图 2-13(a)可等效为图 2-14(a)。

图 2-13(b)为实际电流源模型。根据实际电源之间的等效变换关系,可将实际电流源的串联模型等效变换成实际电压源的并联模型,即把图 2-13(b)等效为图 2-14(b)。

图 2-13(c)为实际电压源模型。同样根据实际电源之间的等效变换关系,可把该图等效为图 2-14(c)。

图 2-13(d)中,电流源的电流为 4 A,对外电路而言,与之串联的电阻在等效时可省去,故图 2-13(d)可等效为图 2-14(d)。

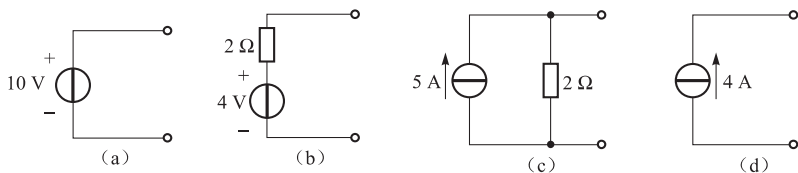


图 2-14 例 2-3 图 2

例 2-4 如图 2-15(a)所示,已知 $I_S=4\text{ A}$, $U_S=8\text{ V}$, $R_1=10\ \Omega$, $R_2=4\ \Omega$, $R_3=6\ \Omega$, $R_4=4\ \Omega$, 求电流 I_2 。

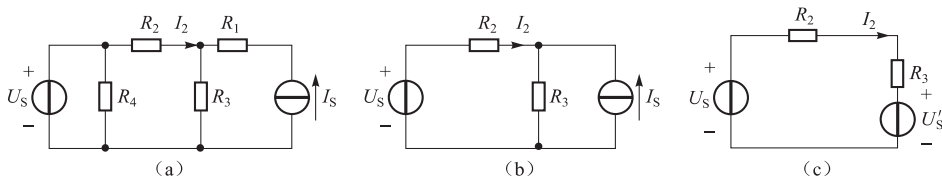


图 2-15 例 2-4 图

解 由于所求电流支路为 R_2 所在的支路,那么除了 R_2 所在支路以外的电路(两侧电路)均可进行等效。 R_2 左侧的电路为电压源 U_S 与电阻 R_4 并联, R_4 可等效掉。而 R_2 右侧一支路为电流源 I_S 与电阻 R_1 串联, R_1 可等效掉。此时,图 2-15(a)可等效为图 2-15(b)。再根据实际电源的等效变换可得图 2-15(c)。其中 $U'_S=R_3 I_S=4\times 6=24\text{ V}$ 。

又由 KVL 可得 $(R_2+R_3)I_2+U'_S-U_S=0$

故

$$I_2 = \frac{U_S - U'_S}{R_2 + R_3} = \frac{8 - 24}{4 + 6} = -1.6\text{ A}$$

【思考题】

2-1 两个网络等效的条件是什么?“等效”是对于哪部分电路等效?对于哪部分电路不等效?

2.2 支路电流法

支路电流法是以支路电流为未知量,应用 KCL 和 KVL 列出电路方程,并联立求解出支路电流的方法。

若电路中有 b 条支路,则支路电流法需列 b 个独立方程。

以图 2-16 为例,电路中的支路数 $b=3$,节点数 $n=2$,以支路电流 I_1 、 I_2 、 I_3 为未知量,共需列 3 个独立方程。列方程前,应先指定各支路电流的参考方向。

首先,对节点用 KCL 方程。

对节点 a 有
$$I_1 = I_2 + I_3$$

对节点 b 有
$$I_2 + I_3 = I_1$$

上述两个方程实际为同一方程,只能算一个独立方程。可以证明,对于有 n 个节点的电路,只能列出 $(n-1)$ 个独立的 KCL 方程。

其次,对回路用 KVL 列方程。

对左侧的网孔按顺时针方向绕行可列出

$$R_1 I_1 - U_{S1} + U_{S2} + R_2 I_2 = 0$$

对右侧的网孔按顺时针方向绕行可列出

$$-R_2 I_2 - U_{S2} + R_3 I_3 = 0$$

对最外面的回路,按顺时针方向绕行可得

$$R_1 I_1 - U_{S1} + R_3 I_3 = 0$$

由于上面三个方程中的任意一个方程都可由另外两个方程推出,所以只能算两个独立方程。同样可以证明,独立的 KVL 方程数只有 $b-(n-1)$ 个。

最后,应用 KCL 和 KVL 共列出 b 个方程,可解出 b 个支路电流。

综上,支路电流法的步骤为:

- (1) 设定各支路电流的参考方向。
- (2) 列 $(n-1)$ 个独立的 KCL 方程。
- (3) 列 $b-(n-1)$ 个独立的 KVL 方程。
- (4) 联立上述 b 个方程并求解。

例 2-5 电路如图 2-17 所示,已知 $I_S = 5\text{ A}$, $U_S = 10\text{ V}$, $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$,用支路电流法求各支路电流。

解 设支路电流 I_1 、 I_2 、 I_3 为参考方向。

列 $(n-1)$ 个即 1 个独立的 KCL 方程

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

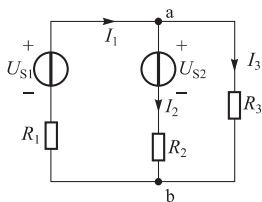


图 2-16 支路电流法

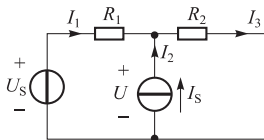


图 2-17 例 2-5 图

列 $b-(n-1)$ 个即 2 个独立的 KVL 方程

$$-U_S + R_1 I_1 + U = 0$$

$$-U + R_2 I_3 = 0$$

根据电流源性质可得

$$I_2 = I_S = 5 \text{ A}$$

该方程为补充方程。

联立上述方程可解出: $I_1 = -1 \text{ A}$, $I_2 = 5 \text{ A}$, $I_3 = 4 \text{ A}$, $U = 16 \text{ V}$ 。

【思考题】

2-2 用支路电流法计算电路时,如何保证所列 KCL、KVL 方程是独立的?

* 2.3 节点电位法

节点电位法是以节点电位为未知量,应用 KCL 列节点方程解出节点电位的分析方法。电路中其他支路的电流或电压可利用已求的节点电位及欧姆定律求得。

以图 2-18 为例,说明节点电位法。

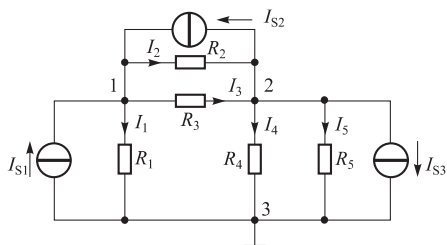


图 2-18 节点电位法

图 2-18 中共有 3 个节点,将节点 3 选作参考节点,节点 1 和节点 2 对节点 3(参考节点)的节点电位分别用 V_1 和 V_2 表示,图中各支路电流的参考方向用箭头标注。根据 KVL,有

$$(V_1 - V_2) + (V_2 - 0) + (0 - V_1) = 0$$

由此可见,当采用节点电位为未知量后,回路中的电压自动满足 KVL,所以用节点电位法列方程只需列 KCL 方程且独立的方程个数为 $(n-1)$ 个,故本

例中的 KCL 方程数为 2 个。根据 KCL,有

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_{S1} - I_{S2} = 0$$

$$I_2 + I_3 - I_4 - I_5 - I_{S2} - I_{S3} = 0$$

将支路电流用节点电位表示

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{V_1 - V_2}{R_3}$$

$$I_4 = \frac{V_2}{R_4}$$

$$I_5 = \frac{V_2}{R_5}$$

并代入两个 KCL 方程中,经移项整理后得

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_1 - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_2 &= I_{S1} + I_{S2} \\ \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)V_2 - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_1 &= -I_{S2} - I_{S3} \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

式(2-12)的两个方程即为节点电位方程。解此方程组可得节点电位 V_1 和 V_2 ,进而求得电路中其他支路的电流或电压。

若用 $G_1 = \frac{1}{R_1}, G_2 = \frac{1}{R_2}, G_3 = \frac{1}{R_3}, G_4 = \frac{1}{R_4}, G_5 = \frac{1}{R_5}$ 代入式(2-12),并分别记

$$\begin{aligned} G_{11} &= G_1 + G_2 + G_3 \\ G_{22} &= G_2 + G_3 + G_4 + G_5 \\ G_{12} &= G_{21} = -(G_2 + G_3) \\ I_{S11} &= I_{S1} + I_{S2} \\ I_{S22} &= -I_{S2} - I_{S3} \end{aligned}$$

则式(2-12)可表示为一般形式

$$\left. \begin{aligned} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 &= I_{S11} \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 &= I_{S22} \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

其中 G_{11}, G_{22} 分别为节点 1 和节点 2 的自电导,简称自导; G_{12}, G_{21} 称为节点 1 和节点 2 的互电导,简称互导; I_{S11}, I_{S22} 分别表示流入该节点 1、节点 2 的电源电流的代数和。

根据式(2-13)可写出节点电位法的文字表达式为

$$\text{自导} \times \text{本节点电位} + \sum (\text{互导} \times \text{相邻节点电位}) = \text{流入该节点的所有电源的电流之代数和}$$

此时,应注意:

(1) 自导始终为正值,互导始终为负值。

(2) “所有电源”中的“电源”既包括了电压源,也包括了电流源,且流入节点取“+”号,流出节点取“-”号。

对于只有两个节点的电路,可用节点电位法直接求出两点之间的电压。如图 2-19 所示,以节点 0 为参考节点,节点 1 对节点 0 的电压为 U_{10} ,应用节点电位法列方程有

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_{10} = \frac{U_{S1}}{R_1} - \frac{U_{S2}}{R_2} + \frac{U_{S3}}{R_3}$$

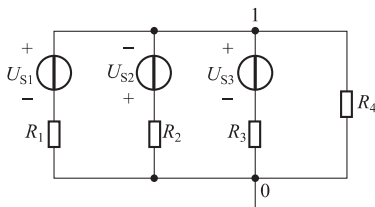


图 2-19 弥尔曼定理

即

$$U_{10} = \frac{\frac{U_{S1}}{R_1} - \frac{U_{S2}}{R_2} + \frac{U_{S3}}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

写成一般形式为

$$U_{10} = \frac{\sum (G_k U_{S_k})}{\sum G_k} \quad (2-14)$$

式(2-14)称为弥尔曼定理。代数和 $\sum (G_k U_{S_k})$ 中,当电压源的正极性端接到节点 1 时, $G_k U_{S_k}$ 前取“+”号,反之取“-”号。

【思考题】

2-3 在节点方程中,自电导项始终为正,互电导项始终为负吗?

2.4 叠加定理

叠加定理是线性电路的一个基本定理。叠加定理可表述为:在线性电路中,如果有多个独立源共同作用,任何一条支路的电流或电压,等于电路中各个独立源单独作用时对该支路所产生的电流或电压的代数和。

一个独立源单独作用意味着其他独立源不作用,即不作用的电压源电压为零,相当于“短路”;不作用的电流源电流为零,相当于“开路”。

下面通过例 2-6 讲述叠加定理的应用。

例 2-6 如图 2-20(a)所示,已知 $I_S = 10 \text{ A}$, $U_S = 12 \text{ V}$, $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 12 \Omega$,试用叠加定理求电流 I_2 和电压 U_2 。

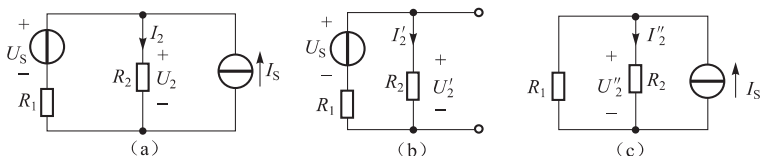


图 2-20 例 2-6 图

解 (1) 根据叠加定理,首先将原电路分解成各个独立源单独作用时的电路模型。图 2-20(b)为电压源单独作用时的电路模型。由于电流源不作用,即令 $I_S = 0$,所以电流源相当于开路。图 2-20(c)为电流源单独作用时的电路模型。由于电压源不作用,令 $U_S = 0$,所以电压源相当于短路。图 2-20(a)中任一支路的电流(或电压)是图 2-20(b)与图 2-20(c)中相应支路电流(或电压)的叠加。

(2) 按各个独立源单独作用时的电路模型求出每条支路的电流或电压。

在图 2-20(b)中,根据 KVL 有

$$I'_2 = \frac{U_s}{R_1 + R_2} = \frac{12}{6 + 12} = \frac{2}{3} \text{ A}$$

$$U'_2 = R_2 I'_2 = 12 \times \frac{2}{3} = 8 \text{ V}$$

在图 2-20(c)中,根据分流公式有

$$I''_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_s = \frac{6}{6 + 12} \times 10 = \frac{10}{3} \text{ A}$$

$$U''_2 = R_2 I''_2 = 12 \times \frac{10}{3} = 40 \text{ V}$$

(3)各独立源单独作用时的电流或电压的代数和即为各支路的电流或电压值。

$$I_2 = I'_2 + I''_2 = \frac{2}{3} + \frac{10}{3} = 4 \text{ A}$$

$$U_2 = U'_2 + U''_2 = 8 + 40 = 48 \text{ V}$$

从上面的分析可知,应用叠加定理时,要注意以下几点:

(1) 叠加定理只能用来计算线性电路中的电流和电压,不能用来直接计算功率。

(2) 叠加时要注意电流和电压的参考方向,求其代数和。

(3) 化为几个单电源电路来进行计算时,所谓电压源不作用,就是在该电压源处用短路代替;电流源不作用,就是在该电流源处用开路代替。

综上,叠加定理的解题步骤可概括为:先分解,后叠加;先分量,后总量。即先把总图进行分解,分解成各个独立源单独作用时的情况,再叠加;先对分解后的电路进行分析,求得分量,再根据分量与总量的关系得出总量。

例 2-7 如图 2-21(a)所示,已知 $U_{S1}=18 \text{ V}$, $U_{S2}=9 \text{ V}$, $R_1=R_2=1 \Omega$, $R_3=4 \Omega$,用叠加定理求各支路电流。

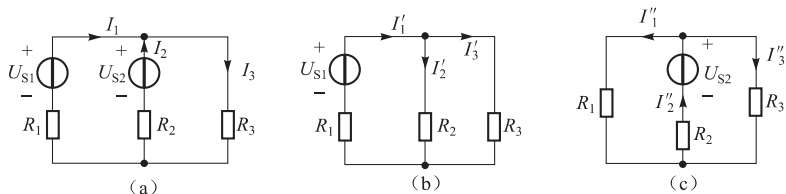


图 2-21 例 2-7 图

解 根据叠加定理,可先把图 2-21(a)分解成图 2-21(b)和(c)。

图 2-21(b)为 U_{S1} 单独作用,此时各支路电流为

$$I'_1 = \frac{U_{S1}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{18}{1 + \frac{1 \times 4}{1 + 4}} = 10 \text{ A}$$

$$I'_2 = I'_1 \times \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 10 \times \frac{4}{1+4} = 8 \text{ A}$$

$$I'_3 = I'_1 - I'_2 = 2 \text{ A}$$

图 2-21(c) 为 U_{S2} 单独作用, 此时各支路电流为

$$I''_2 = \frac{U_{S2}}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} = \frac{9}{1 + \frac{1 \times 4}{1+4}} = 5 \text{ A}$$

$$I''_1 = I''_2 \times \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 5 \times \frac{4}{1+4} = 4 \text{ A}$$

$$I''_3 = I''_2 - I''_1 = 1 \text{ A}$$

应用叠加定理, 有

$$I_1 = I'_1 - I''_1 = 10 - 4 = 6 \text{ A}$$

$$I_2 = -I'_2 + I''_2 = -8 + 5 = -3 \text{ A}$$

$$I_3 = I'_3 + I''_3 = 2 + 1 = 3 \text{ A}$$

【思考题】

2-4 为什么叠加定理只适用于计算线性电路中的电流或电压, 而不能用于直接计算功率?

2.5 戴维南定理

戴维南定理提供了分析有源二端线性网络的等效电路的一般方法, 是电路分析中的一个重要定理。

戴维南定理可表述为: 任意一个线性含源二端网络, 对外电路来说, 总可以用一个电压源与电阻相串联的等效电源代替。其电压源的电压等于该有源二端网络的开路电压 U_{OC} , 串联电阻 R_0 等于该有源二端网络中所有独立源为零(电压源短路, 电流源开路)时的等效电阻。

下面以例 2-8 来讲述戴维南定理的应用。

例 2-8 如图 2-22(a) 所示, 已知 $U_{S1} = 18 \text{ V}$, $U_{S2} = 9 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 1 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$, 试用戴维南定理求 R_3 上的电流 I 和电压 U 。

解 (1) 将待求支路移开, 如图 2-22(b) 所示, 求 U_{OC} 。

$$I_1 = \frac{U_{S1} - U_{S2}}{R_1 + R_2} = \frac{18 - 9}{1 + 1} = 4.5 \text{ A}$$

$$U_{OC} = U_{S2} + R_2 I_1 = 9 + 1 \times 4.5 = 13.5 \text{ V}$$

(2) 求 R_0 。将电压源短路, 如图 2-22(c) 所示。

$$R_0 = R_1 // R_2 = 1 // 1 = 0.5 \Omega$$

(3) 画出戴维南等效电路, 并与待求支路相连, 如图 2-22(d) 所示。

$$I = \frac{U_{OC}}{R_0 + R_3} = \frac{13.5}{0.5 + 4} = 3 \text{ A}$$

$$U = R_3 I = 4 \times 3 = 12 \text{ V}$$

综上,用戴维南定理分析时,解题步骤及注意事项可归纳如下:

(1) 把待求支路移开,以剩下的二端网络作为研究对象。

(2) 求 U_{OC} 。要注意开路电压的参考方向及待求支路移开后不存在分流问题。

(3) 求 R_0 。注意所有独立源为零,即电压源短路,电流源开路。

(4) 画出戴维南等效电路,并与待求支路相连,求解待求量。

戴维南定理可用于求解复杂网络内部某一支路的电流或电压,或用于求解某一支路电阻在变动,而网络其他部分不变情况下的该支路电流,这时有源二端网络的等效电源是不变的,只要改变待求支路的电阻,便容易求得不同电阻值的电流了。

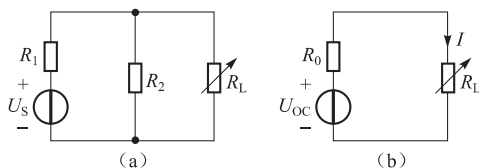


图 2-23 例 2-9 图

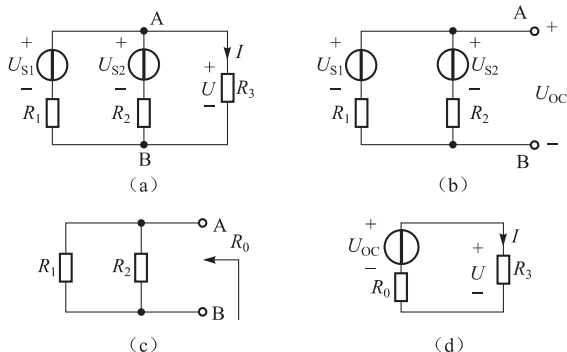


图 2-22 例 2-8 图

例 2-9 如图 2-23(a)所示,已知 $U_s = 9 \text{ V}$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, R_L 可调,问 R_L 为何值时,它吸收的功率最大? 并计算出该最大功率。

解 先分析电路中负载获得最大功率的条件。根据戴维南定理,图 2-23(a)可等效为图 2-23(b)。图中负载 R_L 获得的功率为

$$P_L = I^2 R_L = \left(\frac{U_{OC}}{R_0 + R_L} \right)^2 R_L$$

令 $\frac{dP_L}{dR_L} = 0$, 可解得

$$R_L = R_0 \quad (2-15)$$

即当负载电阻等于电源内阻时,负载上获得的功率最大。电路满足此条件时,我们说负载与电源相匹配。此时的最大功率为

$$P_{L\max} = \left(\frac{U_{OC}}{R_0 + R_L} \right)^2 R_L \Big|_{R_L=R_0} = \frac{U_{OC}^2}{4R_0} \quad (2-16)$$

再回到例题,图 2-23(b)中

$$U_{OC} = \frac{U_s}{R_1 + R_2} \times R_2 = \frac{9}{3+6} \times 6 = 6 \text{ V}$$

$$R_0 = R_1 // R_2 = 3 // 6 = 2 \Omega$$

当时 $R_L = R_0 = 2 \Omega$ 时, R_L 上获得最大功率,且最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_0} = \frac{6^2}{4 \times 2} = 4.5 \text{ W}$$

【思考题】

2-5 什么条件下含独立源的二端网络传输给负载的功率最大?

【本章小结】

1. 电阻的联接有串联、并联、混联三种,各自有相应的特点。
2. 电阻混联中有两种特殊形式,即 $\triangle$ 形联接和Y形联接。它们之间可以相互转换,合理利用其转换公式,可以简化电路。
3. 等效变换仅对外电路成立,对电源内部是不等效的。
4. 只有实际电源之间可以进行等效变换。理想电压源与理想电流源之间不能进行等效变换,即“实际可换,理想不换”。
5. 支路电流法是分析和计算电路的基本方法,共需列 b 个方程,其中有 $(n-1)$ 个独立的KCL方程以及 m 个独立的KVL方程。
6. 节点电位法的文字公式为

$$\text{自导} \times \text{本节点电位} + \sum (\text{互导} \times \text{相邻节点电位}) = \text{流入该节点的所有电源的电流之代数和}$$

7. 叠加定理的解题步骤可概括为:先分解,后叠加;先分量,后总量。
8. 戴维南定理指出:任意线性含源二端网络,可以等效成一个电压为 U_{OC} 的电压源和电阻 R_0 的串联模型。其 U_{OC} 为该网络的开路电压, R_0 为二端网络内所有独立源为零时的等效电阻。
9. 负载获得最大功率的条件为 $R_L = R_0$,此时负载 R_L 上获得的最大功率为 $P_{L\max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_0}$ 。

【实验要求】

- (1) 验证叠加定理。
- (2) 验证戴维南定理。

习 题 2

2-1 试写出图2-24等效电阻 R_{AB} 的表达式。

2-2 电路如图2-25所示,已知 $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$, $R_4 = 2 \Omega$, $R_5 = 5 \Omega$, $R_6 = 20 \Omega$,求等效电阻 R_{AB} 。

2-3 电路如图2-26所示,已知 $R_1 = R_2 = R_3 = 3 \Omega$, $R_4 = R_5 = R_6 = 1 \Omega$,求等效电阻 R_{AB} 。

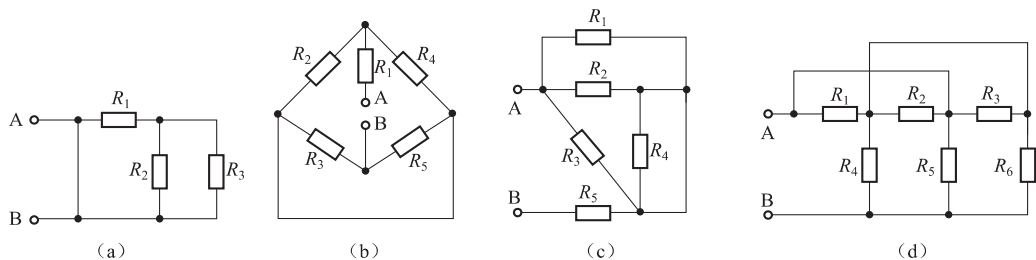


图 2-24 题 2-1 图

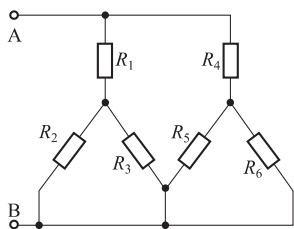


图 2-25 题 2-2 图

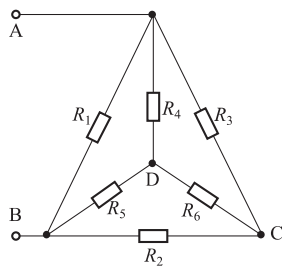


图 2-26 题 2-3 图

2-4 求图 2-27 中等效电源模型。

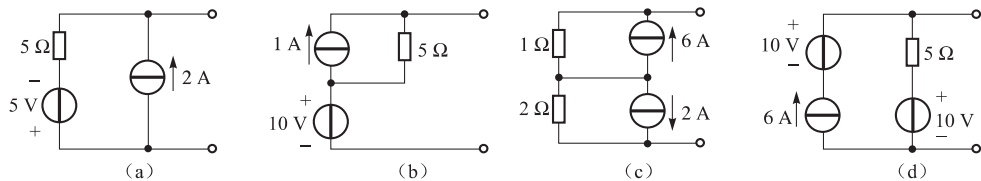


图 2-27 题 2-4 图

2-5 将图 2-28 的电路等效简化为一个电压源模型。

2-6 试用电阻的 Y- Δ 变换,将图 2-29 的电路等效简化为一个电流源模型。

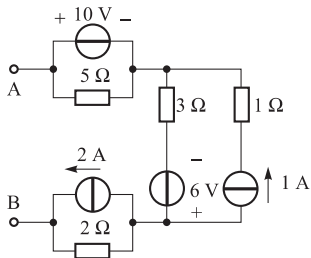


图 2-28 题 2-5 图

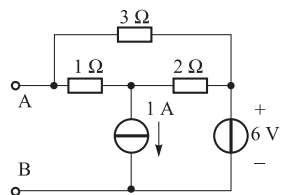


图 2-29 题 2-6 图

2-7 电路如图 2-30 所示,已知 $R_1=60\ \Omega$, $R_2=20\ \Omega$, $R_3=40\ \Omega$, $R_4=40\ \Omega$, $U_1=50\ \text{V}$, $U_2=10\ \text{V}$, $U_4=40\ \text{V}$,用支路电流法求各支路电流。

2-8 电路如图 2-31 所示,已知 $R_1=3\ \Omega$, $R_2=4\ \Omega$, $R_3=5\ \Omega$, $I_{S1}=10\ \text{A}$, $I_{S2}=5\ \text{A}$,试用支路电流法求各电阻上的电流。

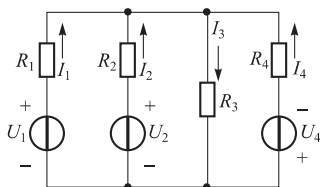


图 2-30 题 2-7 图

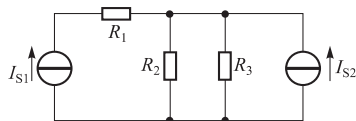


图 2-31 题 2-8 图

2-9 电路如图 2-32 所示,已知 $R_1=4\ \Omega$, $R_2=2\ \Omega$, $R_3=1\ \Omega$, $R_4=2\ \Omega$, $U_S=6\ \text{V}$, $I_S=3\ \text{A}$,求各支路电流 I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 。

2-10 试用节点电位法列图 2-33 的节点电位方程。

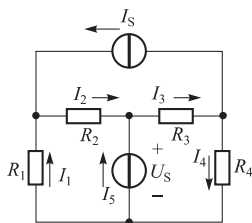


图 2-32 题 2-9 图

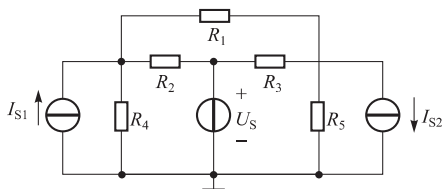


图 2-33 题 2-10 图

2-11 试用节点电位法列图 2-34 中的节点电位方程。

2-12 试用节点电位法求图 2-35 所示电路中的电流 I 。

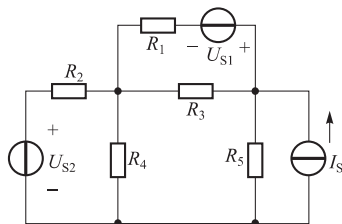


图 2-34 题 2-11 图

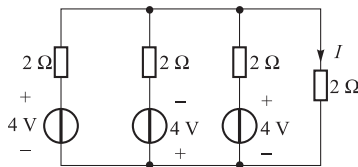


图 2-35 题 2-12 图

2-13 电路如图 2-36 所示,已知 $R_1=2\ \Omega$, $R_2=R_3=6\ \Omega$, $R_4=R_5=4\ \Omega$, $R_6=0.2\ \Omega$, $U_{S1}=24\ \text{V}$, $U_{S2}=12\ \text{V}$,试用叠加定理求电流 I 。

2-14 电路如图 2-37 所示,已知 $R_1=1\ \Omega$, $R_2=R_4=2\ \Omega$, $R_3=4\ \Omega$, $U_S=12\ \text{V}$, $I_S=3\ \text{A}$,

试用叠加定理求电流 I 和电压 U 。

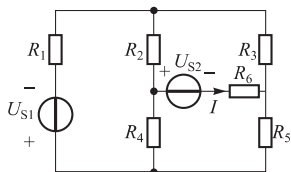


图 2-36 题 2-13 图

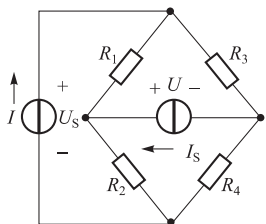


图 2-37 题 2-14 图

2-15 电路如图 2-38 所示, 已知 $R_1=3\ \Omega$, $R_2=R_3=R_4=2\ \Omega$, $I_S=6\ \text{A}$, $U_{S1}=6\ \text{V}$, $U_{S2}=24\ \text{V}$, 试用叠加定理求电流 I 和电压 U 。

2-16 电路如图 2-39 所示, 已知 $R_1=R_2=10\ \Omega$, $R_3=6\ \Omega$, $U_{S1}=9\ \text{V}$, $U_{S2}=3\ \text{V}$, $I_S=2\ \text{A}$, 试求该图的戴维南等效电路。

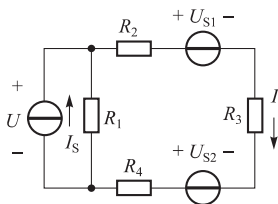


图 2-38 题 2-15 图

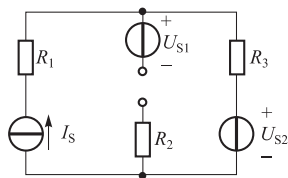


图 2-39 题 2-16 图

2-17 电路如图 2-40 所示, 已知 $R_1=5\ \Omega$, $R_2=R_3=6\ \Omega$, $I_{S1}=4\ \text{A}$, $I_{S2}=5\ \text{A}$, $U_S=10\ \text{V}$, 试求该图的戴维南等效电路。

2-18 电路如图 2-41 所示, 已知 $R_1=R_2=R_3=1\ \Omega$, $I_{S1}=I_{S2}=1\ \text{A}$, 试用戴维南定理求电压 U 。

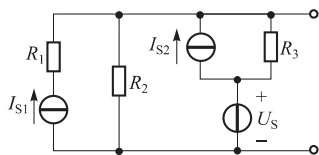


图 2-40 题 2-17 图

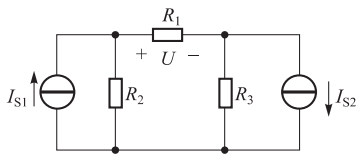


图 2-41 题 2-18 图

2-19 电路如图 2-42 所示, 已知 $R_1=4\ \Omega$, $R_2=2\ \Omega$, $R_3=5\ \Omega$, $R_4=10\ \Omega$, $R_5=8\ \Omega$, $R_6=2\ \Omega$, $U_{S1}=U_{S2}=40\ \text{V}$, 试用戴维南定理求 I_3 。

2-20 电路如图 2-43 所示,已知 $U_s=10\text{ V}$, $I_s=1\text{ A}$, $R_1=R_2=R_3=2\ \Omega$,求 R_L 等于多少时获得功率最大,且值为多少。

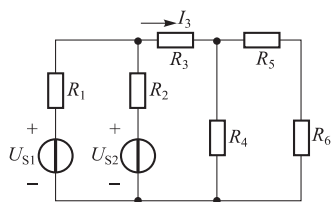


图 2-42 题 2-19 图

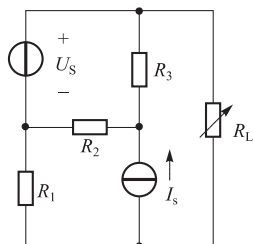


图 2-43 题 2-20 图

第3章 正弦交流电路

【学习要点】

本章是电工与电子课程的重要组成部分。本章主要介绍正弦交流电的基本概念及其表示方法。主要内容有:正弦量的三要素及正弦量的表示方法;基本电路元件 R 、 L 、 C 电压电流关系式和电路的基本定律相量形式;阻抗的概念;正弦交流电路中的功率;并对电路的谐振和功率因素的提高作扼要的阐述。

3.1 正弦交流电的基本概念

在前面学过的直流电路中,电流、电压都不随时间而变化。而在日常生活中和实际工程技术中所遇到的电流、电压,在许多情况下,其大小和方向均随时间而变化,如图 3-1 所示。

大小和方向均随时间变化的电流、电压称为交变电流和交变电压,统称交流电,用 AC 或 ac 表示。交流电变化形式可以是多样的。随时间按正弦规律变化的交流电流和电压

称为正弦交流电流、电压,如图 3-1(a)所示。正弦电流、电压统称正弦交流电。

3.1.1 正弦量的三要素

凡随时间作正弦规律变化的物理量,无论电压、电流还是别的电量统称为正弦量。正弦量可以用正弦函数表示,也可以用余弦函数表示。本书用正弦函数表示正弦量。

正弦电流、电压的大小和方向是随时间变化的,其在任意时刻的数值称为瞬时值,用小写字母 i 和 u 表示。

图 3-2 是一段正弦交流电路, i 在图示的参考方向下,其瞬时值的数学表达式(称为解析

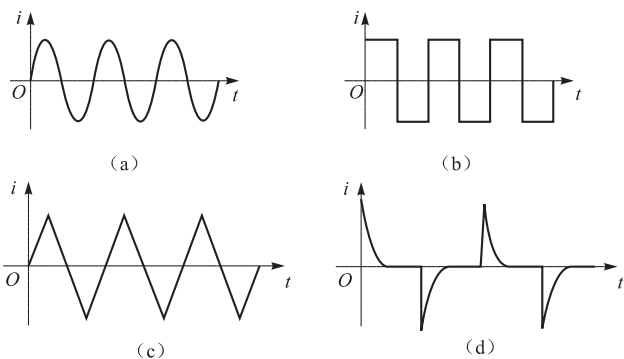


图 3-1 各种电流、电压波形

式)为

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \quad (3-1)$$

式中, I_m (振幅)、 ω (角频率)、 ψ_i (初相角) 是正弦量之间进行比较和区分的主要依据, 若将这三个量值代入已选定正弦函数式中就完全确定了这个正弦量, 故称振幅、角频率、初相角为正弦量的特征量即三要素, 如图 3-3 所示。

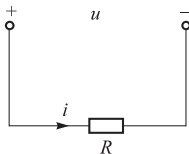


图 3-2 电压、电流参考方向

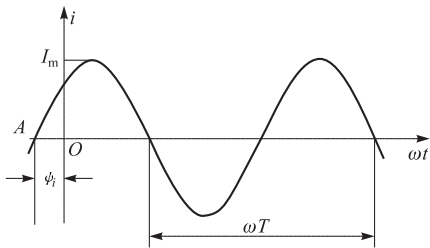


图 3-3 正弦电流

图 3-3 所示是正弦电流瞬时值随时间变化的图形 (称为波形图)。下面具体分析正弦量的三要素。

(1) 正弦量要素之一——振幅。 I_m 称为正弦电流的振幅或最大值。它是正弦电流在整个变化过程中所能达到的最大的瞬时值。用注有下标的大写字母表示。例如, 电压的最大值用 U_m 表示, 电流的最大值用 I_m 表示。

(2) 正弦量要素之二——角频率 (频率、周期)。 ω 称为正弦量的角频率。它是单位时间内角度的变化量, 是反映正弦量变化快慢的一个物理量, 即在式 $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ 中

$$\omega = \frac{d}{dt}(\omega t + \psi_i) \quad (3-2)$$

它的单位是 rad/s。

T 称为正弦量的周期。它是正弦量循环一次所需要的时间, 如图 3-4 所示。其基本单位为秒 (s), 常用单位还有毫秒 (ms)、微秒 (μ s) 和纳秒 (ns)。

f 称为正弦量的频率。它是正弦量每秒循环的次数, 其基本单位为赫兹, 简称赫 (Hz)。我国电力系统的正弦交流电频率是 50 Hz, 习惯上称为“工频”, 其周期是 0.02 s。常用单位还有千赫 (kHz)、兆赫 (MHz) 和吉赫 (GHz)。显然, 周期和频率互为倒数, 即

$$f = \frac{1}{T} \quad (3-3)$$

周期和频率也是描述正弦量变化快慢的物理量, 它们与角频率的关系为

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (3-4)$$

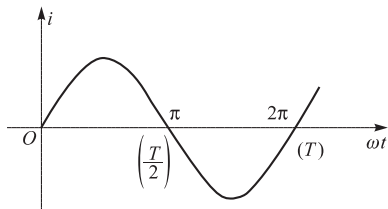


图 3-4 正弦交流电周期

(3) 正弦量要素之三—初相位。 $(\omega t + \phi_i)$ 称为正弦量的相位角或相位,它反映了正弦量变化的进程,其单位为弧度(rad)或度($^\circ$)。

ϕ_i 称为正弦量的初相角,简称初相。它是正弦量在 $t=0$ 时刻的相位角,即

$$(\omega t + \phi_i) \big|_{t=0} = \phi_i \quad (3-5)$$

初相角可正可负,为便于问题的叙述,通常规定 ϕ_i 在 $-\pi \sim \pi$ 范围内取值,否则可通过加减 2π 进行调整。 ϕ_i 的大小和正负与计时起点的选择有关,如图 3-5 所示。

由波形图可以看出,若正弦量以零值为计时起点,则初相 $\phi=0$; 若零值在坐标原点左侧,则初相 ϕ 为正; 若零值在坐标原点右侧,则初相 ϕ 为负。

综上所述,如果知道一个正弦量的振幅、角频率(频率)和初相位,就可以完全确定该正弦量,即可以用数学表达式或波形图将它表示出来。

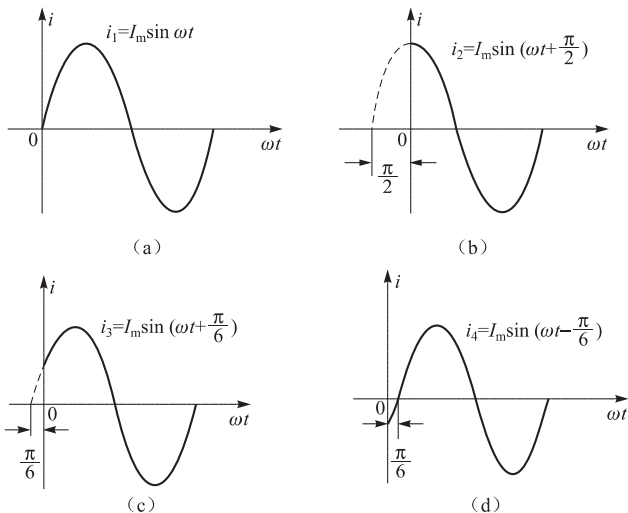


图 3-5 不同情况下初相角

例 3-1 已知 $i(t) = \sin(1\,000t + 30^\circ)$ A, 求最大值、频率、初相位。

解 最大值 $I_m = 1$ A

频率 因为 $\omega = 1\,000$ rad/s 所以 $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1\,000}{2\pi} = 159$ Hz

初相位 $\phi_i = 30^\circ$

例 3-2 在选定的参考方向下,已知两正弦量的解析式为 $u = 200\sin(1\,000t + 200^\circ)$ V, $i = -5\sin(314t + 30^\circ)$ A, 试求两个正弦量的三要素。

解 (1) 因为

$$\begin{aligned} u &= 200\sin(1\,000t + 200^\circ) \\ &= 200\sin(1\,000t - 160^\circ) \text{ V} \end{aligned}$$

所以电压的最大值 $U_m = 200$ V, 角频率 $\omega = 1\,000$ rad/s, 初相 $\phi_u = -160^\circ$ 。

(2) 因为

$$\begin{aligned} i &= -5\sin(314t + 30^\circ) \\ &= 5\sin(314t + 30^\circ + 180^\circ) \\ &= 5\sin(314t - 150^\circ) \text{ A} \end{aligned}$$

所以电流的最大值 $I_m = 5$ A, 角频率 $\omega = 314$ rad/s, 初相 $\phi_i = -150^\circ$ 。

例 3-3 已知选定参考方向下正弦量的波形图如图 3-6 所示,试写出正弦量的解析式。

解 从图 3-6 可知电压 u_1 的最大值 $U_m = 200 \text{ V}$, 角频率为 ω , 初相 $\phi_u = \frac{\pi}{3}$ 。

所以电压 u_1 的解析式

$$u_1 = 200 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ V}$$

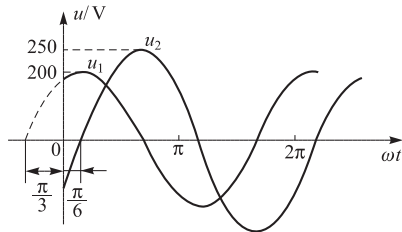


图 3-6 例 3-3 图

从图 3-6 可知电压 u_2 的最大值 $U_m = 250 \text{ V}$, 角频率为 ω , 初相 $\phi_u = -\frac{\pi}{6}$ 。

所以

$$u_2 = 250 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \text{ V}$$

3.1.2 正弦量的相位差

对于两个同频率的正弦量而言,虽然都随时间按正弦规律变化,但是它们随时间变化的进程可能不同,为了描述同频率正弦量随时间变化进程的先后,引入了相位差。

例如,有两个同频率的电压和电流,分别为

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \phi_u)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi_i)$$

两者的相位差为

$$\varphi = (\omega t + \phi_u) - (\omega t + \phi_i) = \phi_u - \phi_i \quad (3-6)$$

由式(3-6)可得到,当两个正弦量同频率时其相位差即为初相角之差,且与时间 t 无关,在任何瞬时都是一个常数。因此对于多个同频率的正弦量来说,往往可以把其中的一个选为参考正弦量。并令初相角为零,而其余的正弦量的初相则由它们的相位差来决定。 φ 在 $-\pi \sim \pi$ 范围内取值。

当 $\phi_u - \phi_i = 0$ 时,则两正弦量之间的相位关系为“同相”,如图 3-7(a)所示;

当 $\phi_u - \phi_i > 0$ 时,则两正弦量之间的相位关系为前者(u)“超前”后者(i),或称后者(i)“滞后”前者(u),如图 3-7(b)所示;

当 $\phi_u - \phi_i < 0$ 时,则两正弦量之间的相位关系为后者(i)“超前”前者(u),或称前者(u)“滞后”后者(i),如图 3-7(c)所示;

当 $\phi_u - \phi_i = 180^\circ$ 时,则称两正弦量“反相”,如图 3-7(d)所示;

当 $\phi_u - \phi_i = 90^\circ$ 时,则称两正弦量“正交”,如图 3-7(e)所示;

必须强调,比较正弦量之间的相位差时要注意三个条件(即“三同”)。

(1) 同频率。只有同频率的正弦量才有确定的相位关系,它们的相位差才有意义。

(2) 同函数。正弦和余弦函数表示的交流电都是正弦交流电,当要比较相位差时要化成同一函数来表达才能用式(3-6)进行计算。

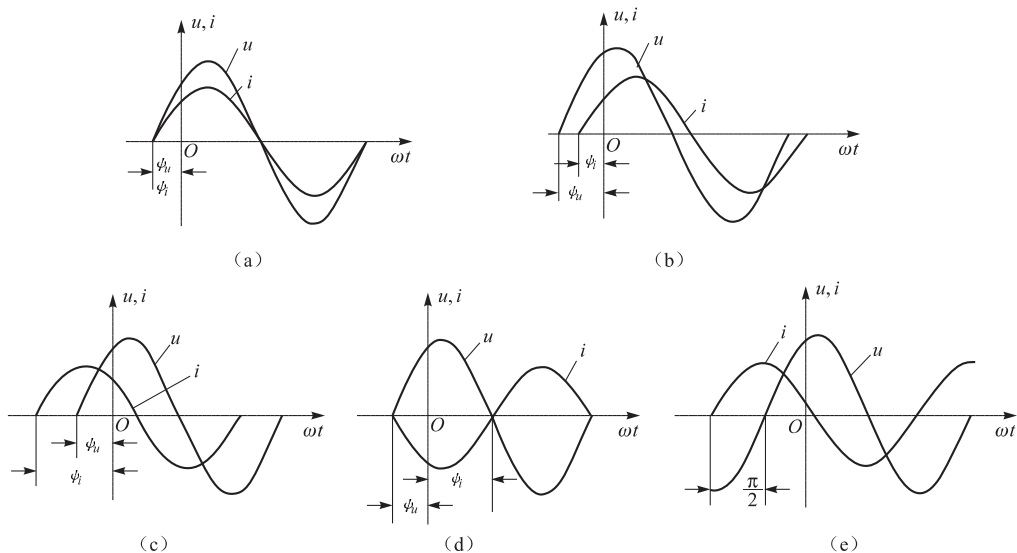


图 3-7 几种不同计时起点的正弦量波形图

(3) 同符号。用式(3-6)计算两正弦量的相位差时,两正弦量的数学表达式前面的符号应该相同。

例 3-4 已知 $u(t) = U_m \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ V}$

$$i_1(t) = I_{1m} \sin(\omega t - 75^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = I_{2m} \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ A}$$

试以电压为参考正弦量,重新写出它们的正弦函数表达式。

解 先求正弦量之间的相位差

$$\varphi_1 = \phi_u - \phi_{i_1} = -30^\circ - (-75^\circ) = 45^\circ$$

$$\varphi_2 = \phi_u - \phi_{i_2} = -30^\circ - 60^\circ = -90^\circ$$

若令 $\phi_u = 0$,

$$\phi_{i_1} = \phi_u - \varphi_1 = 0 - 45^\circ = -45^\circ$$

$$\phi_{i_2} = \phi_u - \varphi_2 = 0 - (-90^\circ) = 90^\circ$$

故得各正弦量的表达式为

$$u(t) = U_m \sin \omega t \text{ V}$$

$$i_1(t) = I_{1m} \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = I_{2m} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ A}$$

例 3-5 设有两频率相同的正弦电流

$$i_1(t) = 5 \cos(\omega t + 60^\circ) \text{ A} \quad i_2(t) = 10 \sin(\omega t + 40^\circ) \text{ A}$$

问哪个电流滞后？滞后的角度是多少？若 $\omega=110\pi$ ，则滞后的时间是多少？

解 首先将 $i_1(t)$ 改写成正弦函数，即

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 5\cos(\omega t + 60^\circ) \\ &= 5\sin(\omega t + 60^\circ + 90^\circ) \\ &= 5\sin(\omega t + 150^\circ)\text{A} \end{aligned}$$

故相位差

$$\varphi = \phi_1 - \phi_2 = 150^\circ - 40^\circ = 110^\circ$$

电流 $i_2(t)$ 滞后，滞后的角度为 110° 。

相位差 φ 除以角频率 ω 即为时间差，因此

$$t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{110^\circ}{110\pi} = 0.006\text{ s}$$

电流 $i_2(t)$ 滞后于 $i_1(t)$ 的时间为 0.006 s 。

不同频率的两个正弦量之间的相位差是随时间变化的，而不再是常数，超前和滞后关系也就没有意义了。

3.1.3 正弦量的有效值

交流电和直流电具有不同的特点，但是从能量转换的角度来看，两者是可以等效的。为此，引入一个新的物理量——交流电的有效值。

一个直流电流 I 与一个交流电流 i 分别通过阻值相等的电阻 R ，如图 3-8 所示。如果通电的时间相同设为 T ，电阻 R 上产生的热量也相等，那么直流电流 I 的数值叫做交流电流 i 的有效值。

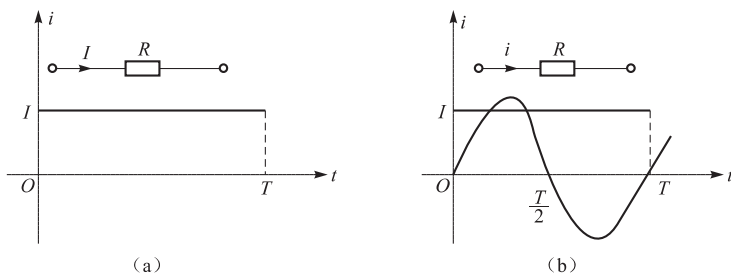


图 3-8 有效值图

在工程应用中常用有效值表示电流和电压的大小。常用交流电表指示的电压、电流读数，电气设备的额定值都是有效值。标准电压 220 V ，也是指供电电压的有效值。但各电气元件和电气设备的耐压值仍按最大值考虑。有效值用大写字母表示，如电压的有效值用 U 表示，电流的有效值用 I 表示。

如图 3-8(a)所示

$$W' = I^2 RT;$$

如图 3-8(b)所示

$$W = \int_0^T i^2 R dt$$

由定义可知 W 与 W' 相等, 则

$$\int_0^T i^2 R dt = I^2 RT$$

解得

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

同理

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}$$

若令 $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$, 分别代入上式可得正弦量的有效值为

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707 I_m \\ U &= \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707 U_m \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

故正弦量的一般表达式又可写成

$$\left. \begin{aligned} i &= \sqrt{2} I \sin(\omega t + \psi_i) \\ u &= \sqrt{2} U \sin(\omega t + \psi_u) \end{aligned} \right\} \quad (3-8)$$

例 3-6 某电容器的耐压值为 300 V, 问能否接在有效值为 200 V 的交流电源上?

解 电压的最大值

$$U_m = \sqrt{2} U = \sqrt{2} \times 220 = 311 \text{ V}$$

显然电源电压的最大值超过了电容器的耐压值, 故不能接在此电源上。

3.1.4 正弦交流电相量表示法

前面介绍解析法和波形图。如果直接利用正弦量的解析法或波形图来分析正弦交流电路, 或对正弦量进行加、减运算, 无论解析法还是图像法, 都非常麻烦。为此, 工程上常用复数表示正弦量, 把对正弦量的各种运算转化为复数的运算从而大大简化了正弦电流的分析计算过程, 这种方法称为相量法。

1. 复数概念

在数学中常用 $A = a + ib$ 表示复数。其中 a 为实部, b 为虚部, $i = \sqrt{-1}$ 称为虚单位。在电工技术中, 为区别于与电流的符号, 虚单位常用 j 表示, 即

$$A = a + jb$$

若已知一个复数的实部和虚部, 那么这个复数便可确定。我们取一直角坐标系, 其横轴称为实轴, 纵轴称为虚轴, 这两个坐标轴所在的平面称为复平面。这样, 每一个复数在复平面上都可找到唯一的点与之对应, 而复平面上每一点也都对应着唯一的复数, 如复数 $A = 4 + j3$, 所对应的点即为图 3-9 上的 A 点。

复数还可以用复平面上的一个矢量来表示,如图 3-10 所示,即复数用一个从原点 O 到 P 点的矢量来表示,这种矢量称为复矢量。矢量的长度 r (或 $|A|$) 为复数的模,即

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

矢量和实轴正方向的夹角 θ 称为复数 A 的辐角,即

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad (\theta \leq \pi)$$

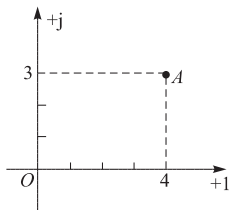


图 3-9 复数在复平面上的表示

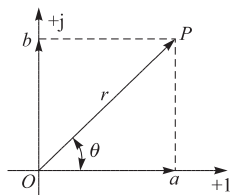


图 3-10 复数的矢量表示

不难看出,复数 A 的模 r (或 $|A|$) 在实轴上的投影就是复数 A 的实部,在虚轴上的投影就是复数 A 的虚部,即

$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \sin \theta$$

复数的表示有下面四种:

(1) 复数的代数形式

$$A = a + jb$$

(2) 复数的三角形式

$$A = r \cos \theta + jr \sin \theta$$

(3) 复数的指数形式

$$A = re^{j\theta}$$

(4) 复数的极坐标形式

$$A = r \angle \theta$$

在以后的运算中,代数形式和极坐标形式是常用的,对它们的换算应十分熟练。在一般情况下,复数的加减运算用代数式进行较为方便。

设有复数

$$A = a_1 + jb_1$$

$$B = a_2 + jb_2$$

则

$$A \pm B = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

即复数相加减时,将实部和实部相加减,虚部和虚部相加减。复数的加减运算也可在复平

面上用平行四边形法则作图完成,如图3-11所示。

在一般情况下,复数的乘除运算用指数或极坐标形式进行,主要用极坐标形式进行。

设

$$A=r_1\angle\theta_1$$

$$B=r_2\angle\theta_2$$

则

$$AB=r_1\angle\theta_1 r_2\angle\theta_2=r_1 r_2\angle(\theta_1+\theta_2)$$

$$\frac{A}{B}=\frac{r_1\angle\theta_1}{r_2\angle\theta_2}=\frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1-\theta_2)$$

即复数相乘,模相乘,辐角相加;复数相除,模相除,辐角相减。

例3-7 写出复数 $A_1=4-j3$, $A_2=-3+j4$ 的极坐标形式。

解 A_1 的模

$$r_1=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

辐角

$$\theta=\arctan\left(\frac{-3}{4}\right)=-36.9^\circ \quad (\text{在第四象限})$$

则 A_1 的极坐标形式为 $A_1=5\angle-36.9^\circ$ 。

A_2 的模

$$r_2=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

辐角

$$\theta=\arctan\left(\frac{4}{-3}\right)=-126.9^\circ \quad (\text{在第二象限})$$

则 A_2 的极坐标形式为 $A_2=5\angle-126.9^\circ$ 。

例3-8 求复数 $A_1=8+j6$, $A_2=6-j8$ 之和 A_1+A_2 及积 AB 。

解

$$\begin{aligned} A_1+A_2 &= (8+j6)+(6-j8) \\ &= 14-j2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB &= (8+j6)(6-j8) \\ &= \sqrt{8^2+6^2}\angle\arctan\left(\frac{6}{8}\right) \times \sqrt{6^2+8^2}\angle\arctan\left(\frac{-8}{6}\right) \\ &= 100\angle[36.9^\circ+(-53.1^\circ)]=100\angle-16.2^\circ \end{aligned}$$

2. 正弦量的相量表示

在掌握了复数的概念以后,我们便很容易联想到同频率正弦电压和电流,因为同频率正弦量的相位差与频率无关。因此,对电路进行分析时,求某一正弦量,只要确定其大小(最大值或有效值)与初相即可,这样正弦量的三要素可简化为二要素。作为复数,也有两个要素,即模和辐角。基于此,可以用复数的模表示正弦量的大小(最大值或有效值),复数的辐角表示正弦量

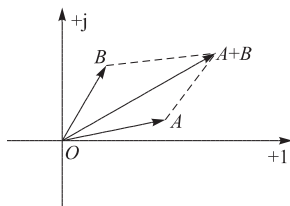


图3-11 复数加法运算

的初相。我们把表示正弦交流电的二个要素(最大值、初相角)的复数称为相量。为了与一般复数相区别,相量用头上带点的大写字母表示。

例如,对于正弦电流

$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \psi_i)$$

可以用复数表示为

$$\dot{I}_m = I_m \angle \psi_i \quad (3-9)$$

或

$$\dot{I} = I \angle \psi_i \quad (3-10)$$

其中 I_m, I 分别为正弦电流的最大值和有效值, ψ_i 为其初相。式(3-9)和式(3-10)分别称为正弦量的有效值相量和最大值相量。

对于正弦电压

$$u = 150 \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \text{V}$$

最大值相量为

$$\dot{U}_m = U_m \angle \psi_u = 150 \sqrt{2} \angle \frac{\pi}{3} \text{V}$$

有效值相量为

$$\dot{U} = U \angle \psi_u = 150 \angle \frac{\pi}{3} \text{V}$$

由于电路分析中往往有效值比最大值(幅值)更为常用,因而分析中一般所指的相量都是指正弦量的有效值相量。

值得注意的是,用相量表示正弦量是指两者有对应的关系,而不是指两者相等。正弦量是时间的函数,而相量只是与正弦量的大小(最大值或有效值)及初相相对应的复数。

3. 正弦量的相量图

前面讲过,复数可以在复平面上用一根带箭头的线段来表示,那么,用复数表示正弦交流电,即相量当然也可以用一个带箭头的线段表示,只要线段的长度按一定比例表示相量的模即有效值,线段与实轴的夹角表示相量的幅角即初相角。这样构成的图形称为相量图。多个同频率正弦量,用相量表示时,可以画在同一相量图上。上述电压与电流的相量图如图3-12所示。

为了清楚起见,相量图中可省略虚轴,也可同时省略虚轴和实轴。只以实轴作为基准线就可以了。

例3-9 作出下列电流、电压的相量图。

$$i(t) = 10 \sqrt{2} \sin\left(100\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) \text{A}$$

$$u(t) = 200 \sqrt{2} \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{V}$$

$$e(t) = 200 \sqrt{2} \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \text{V}$$

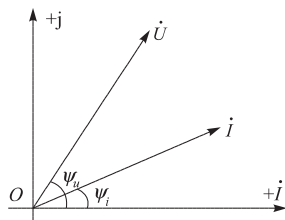


图3-12 电压电流相量图

解 (1) 作基准线 X 轴,如图 3-13 所示。(基准线通常也可以省略不画)

(2) 确定比例的单位。

(3) 从 O 作三条射线,与基准线的夹角分别为 $-\frac{2\pi}{3}$ 、 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{6}$ 。

(4) 在三条射线上截取线段,按比例单位使线段的长度符合 i 、 u 、 e 的有效值,并在线段末加上箭头(有向线段)。

例 3-10 已知: $i_1(t) = 4\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\text{A}$

$$i_2(t) = 4\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)\text{A}$$

用相量图求 $i = i_1 + i_2$ 。

解 作出与 i_1 、 i_2 相对应的相量 $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$,如图 3-14 所示。应用平行四边形法则求和即

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

由于 $I_1 = I_2$,并且 $\dot{I}_1$ 和 $\dot{I}_2$ 与 X 轴(图中省略了此基准线)正方向的夹角均为 $\frac{\pi}{3}$,从图中可以看出 X 轴上、下各为一个等边三角形,则 I 与 I_1 、 I_2 相等,即

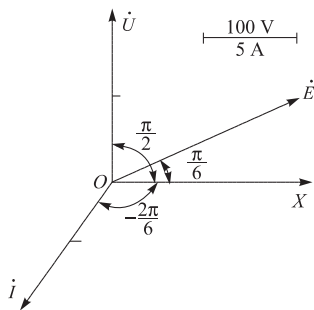


图 3-13 例 3-9 图

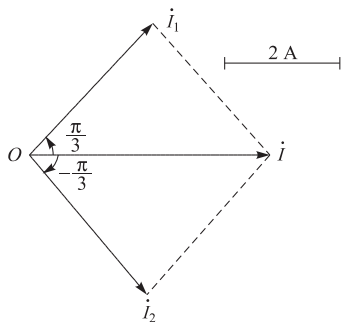


图 3-14 例 3-10 图

$$I = I_1 = I_2 = 4\text{ A}$$

则

$$I_m = \sqrt{2}I = 4\sqrt{2}\text{ A}$$

又由于 $\dot{I}$ 与 X 轴正方向一致,即初相角为零,从而得到

$$i = i_1 + i_2 = 4\sqrt{2}\sin\omega t\text{ A}$$

例 3-11 已知:

$$u_1(t) = 220\sqrt{2}\sin\omega t\text{ V}$$

$$u_2(t) = 220\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\text{ V}$$

用相量图求 $u = u_1 - u_2$ 。

解 作出与 u_1 、 u_2 相对应的相量 $\dot{U}_1$ 、 $\dot{U}_2$ ，如图 3-15 所示。

应用平行四边形法则求和，只需求出 $\dot{U}_1$ 与 $\dot{U}_2$ 的和。即

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + (-\dot{U}_2)$$

由于 $U_1 = U_2$ ，所以以 U_1 、 $(-U_2)$ 为邻边的平行四边形是菱形，其对角线互相垂直平分，则 $\dot{U}$ 与 X 轴正方向的夹角均为 $\frac{\pi}{6}$ ， $\dot{U}$ 的长度为

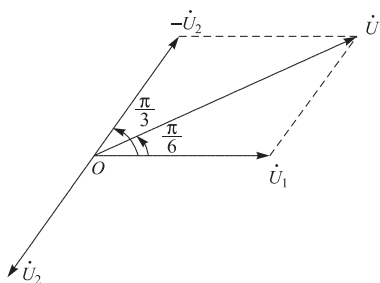


图 3-15 例 3-11 图

$$U = 2U_1 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}U_1 = 220\sqrt{3} \text{ V}$$

则

$$U_m = \sqrt{2}U = 220\sqrt{6} \text{ V}$$

$$u = u_1 - u_2 = 220\sqrt{6} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ V}$$

【思考题】

3-1 什么是正弦交流电的三要素？什么是交流电的周期、频率和角频率？它们之间有什么关系？

3-2 一个工频正弦电压的最大值为 311 V，在 $t=0$ 时的值为 -220 V，试求它的解析式。

3-3 三个正弦量 i_1 、 i_2 和 i_3 的最大值分别为 1 A、2 A 和 3 A。若 i_3 的初相角为 60° ， i_1 较 i_2 超前 30° ，较 i_3 滞后 150° 。试分别写出这三个电流的解析式（设正弦量的角频率为 ω ）。

3-4 已知两个正弦电压分别为 $u_1(t) = -U_m \sin(\omega t + \phi_{1u})$ ， $u_2(t) = U_m \cos(\omega t + \phi_{2u})$ ，它们之间的相位差是多少？试用相量表示 u_1 、 u_2 和 $u = u_1 + u_2$ 。

3.2 电路定律和元件电流、电压关系的相量表示

3.2.1 电路定律的相量表示形式

在前面直流电路中已经介绍了基尔霍夫电流定律(KCL)和基尔霍夫电压定律(KVL)，其表达式为

$$\text{KCL:} \quad \sum i = 0 \quad (3-11)$$

$$\text{KVL:} \quad \sum u = 0 \quad (3-12)$$

在交流电路中，如电路在频率为 f 的正弦电源的作用下，则各处的电压、电流仍为同频率的正弦量。根据正弦量的相量表示，可得基尔霍夫定律相量形式

$$\sum \dot{I} = 0 \quad (3-13)$$

$$\sum \dot{U} = 0 \quad (3-14)$$

3.2.2 电阻元件

如图3-16所示为电阻电路图和相量模型图。在日常生活和工作中接触到的白炽灯、电炉、电烙铁等,都属于电阻性负载,它们与交流电源联接组成纯电阻电路。

在图示参考方向下可得到

$$i = \frac{u}{R}$$

图3-16 正弦交流电电阻电路图和相量模型图

设电压

$$u = U_m \sin(\omega t + \phi_u)$$

根据欧姆定律

$$\text{则} \quad i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \phi_u) = I_m \sin(\omega t + \phi_i) \quad (3-15)$$

由上式分析可得,在电阻两端加一个正弦交流电压可产生同频率同相位的正弦交流电流,且初相角相同。其波形图如图3-17(a)所示,相量图如图3-17(b)所示。

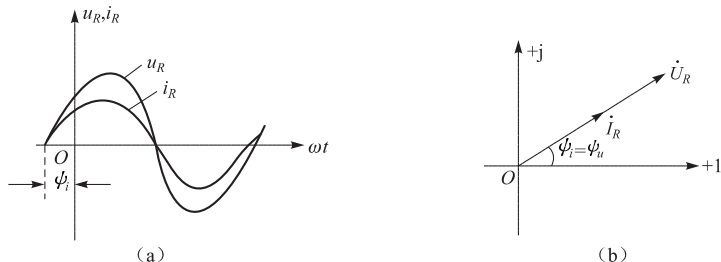


图3-17 电阻元件的电流、电压波形图与相量图

$$\text{其中} \quad I_m = \frac{U_m}{R} \quad \text{或} \quad U_m = RI_m \quad (3-16)$$

$$\phi_i = \phi_u \quad (3-17)$$

这表明在纯电阻电路中,电流与电压最大值之间服从欧姆定律。

将上式两边同除 $\sqrt{2}$,则

$$I = \frac{U}{R} \quad \text{或} \quad U = RI \quad (3-18)$$

这表明在纯电阻电路中,电流与电压有效值之间服从欧姆定律。

由式(3-15)得其相量表达式为

$$\dot{I} = I \angle \phi_i = \frac{U}{R} \angle \phi_i$$

由式(3-17)得

$$\dot{I} = \frac{U}{R} \angle \psi_u = \frac{\dot{U}}{R}$$

或

$$\dot{U} = R \dot{I} \quad (3-19)$$

同理可推导出

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{R}$$

这表明在纯电阻电路中,电流与电压的相量之间服从欧姆定律。上式即为电阻元件伏安关系的相量形式。

例 3-12 一电阻 $R=100\ \Omega$, R 两端的电压 $u_R=100\sqrt{2}\sin(\omega t-30^\circ)\text{V}$ 。

(1) 求通过电阻 R 的电流 I_R 和 i_R ;

(2) 作 $\dot{I}_R$ 、 $\dot{U}_R$ 的相量图。

解 (1) 因为

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{100\sqrt{2}\sin(\omega t-30^\circ)}{100} = \sqrt{2}\sin(\omega t-30^\circ)\text{A}$$

$$I_R = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1\text{ A}$$

(2) 相量图如图 3-18 所示。

3.2.3 电感元件

图 3-19(a)所示的电路为一纯电感电路。在图示参考方向下可得到

$$u = L \frac{di}{dt}$$

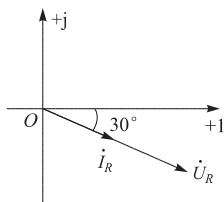
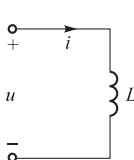
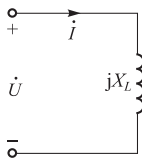


图 3-18 例 3-12 图



(a)



(b)

图 3-19 正弦交流电感电路图和相量模型图

设通过电感的电流为 $i = I_m \sin(\omega t + \phi_i)$, 则

$$\begin{aligned} u &= L \frac{di}{dt} = L \frac{d[I_m \sin(\omega t + \phi_i)]}{dt} \\ &= \omega L I_m \cos(\omega t + \phi_i) \\ &= \omega L I_m \sin\left(\omega t + \phi_i + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$=U_m \sin(\omega t + \phi_u) \quad (3-20)$$

由上式分析可得,在正弦交流电路中,在电感两端加一个正弦交流电压可产生同频率正弦交流电流,而且电压的相位超前电流 90° ,即

$$\phi_u = \phi_i + 90^\circ \quad (3-21)$$

其波形图如图 3-20(a)所示,相量图如图 3-20(b)所示。

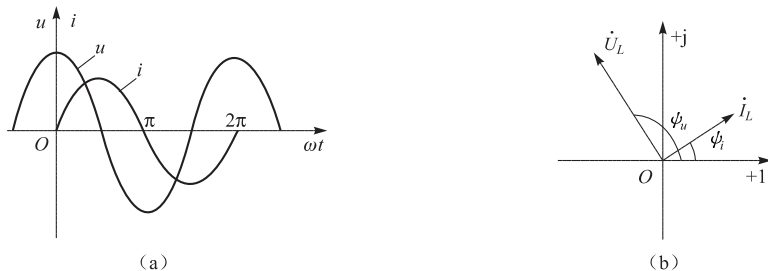


图 3-20 电感元件电压、电流波形和相量图

由式(3-20)可得到电感电压与电感电流的最大值之间的关系为

$$U_m = \omega L I_m \quad \text{或} \quad I_m = \frac{U_m}{\omega L} \quad (3-22)$$

将上式两边同除 $\sqrt{2}$, 则电感电压与电感电流的有效值之间的关系为

$$U = \omega L I = X_L I \quad \text{或} \quad I = \frac{U}{X_L} \quad (3-23)$$

这就表明了,在形式上电感电压与电感电流的有效值(或最大值)的关系式与欧姆定律相似。其中

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \quad (3-24)$$

X_L 称为电抗或电感的电抗,简称感抗,单位为欧姆(Ω)。

它表明电感元件对电流的一种抵抗作用。应注意 X_L 不仅和电感本身的 L 有关,还和电源频率 f 成正比, f 越大这种抵抗作用也越大。所以,电感元件具有通低频阻高频的作用(隔交通直)。

由式(3-20)得其相量表达式为

$$\dot{U} = U \angle \phi_u = \omega L I \angle \left(\phi_i + \frac{\pi}{2} \right) = j\omega L I \angle \phi_i$$

$$\text{所以} \quad \dot{U} = jX_L \dot{I} \quad (3-25)$$

上式即为电感元件伏安关系的相量形式,电感电路的相量模型如图 3-19(b)所示。

例 3-13 已知电感线圈 $L = 35 \text{ mH}$, 外接电压 $u = 220 \sqrt{2} \sin(314t + 60^\circ) \text{ V}$,

(1) 作出 $\dot{U}$ 及 $\dot{I}$ 的相量图;

(2) 求电感电流的瞬时值表达式。

解 (1) 因为电感电流的相位滞后于电压相位 90° , 因此电流的初相角为 -30° 。故 $\dot{U}$ 和 $\dot{I}$ 相量图如图 3-21 所示。

(2) 电感的感抗

$$X_L = \omega L = 2\pi fL = 2 \times 3.14 \times 50 \times 0.035 = 11 \, \Omega$$

电流有效值为

$$I = \frac{U}{X_L} = \frac{220}{11} = 20 \, \text{A}$$

电流的瞬时值表达式

$$i = 20\sqrt{2}\sin(314t - 30^\circ) \, \text{A}$$

3.2.4 电容元件

图 3-22(a) 所示的电路为一纯电容电路。在图示参考方向下可得到

$$i = C \frac{du}{dt}$$

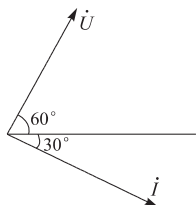
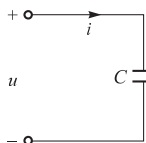
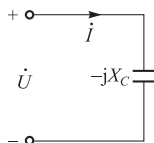


图 3-21 例 3-13 图



(a)



(b)

图 3-22 正弦交流电电容电路图与相量模型图

设加在电容两端的电压 $u = U_m \sin(\omega t + \phi_u)$, 则流过电容的电流

$$\begin{aligned} i &= C \frac{du}{dt} \\ &= C \frac{d[U_m \sin(\omega t + \phi_u)]}{dt} \\ &= \omega C U_m \cos(\omega t + \phi_u) \\ &= \omega C U_m \sin\left(\omega t + \phi_u + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= I_m \sin(\omega t + \phi_i) \end{aligned} \quad (3-26)$$

由上式分析可得, 在正弦交流电路中, 在电容两端加一个正弦交流电压, 则产生同频率正弦交流电流, 而且电流的相位超前电压 90° , 即

$$\phi_i = \phi_u + 90^\circ \quad (3-27)$$

其波形图如图 3-23(a) 所示, 相量图如图 3-23(b) 所示。

由式(3-26)可得到电容电压与电容电流的最大值之间的关系为

$$I_m = \omega C U_m \quad \text{或} \quad U_m = \frac{I_m}{\omega C} \quad (3-28)$$

将上式两边同除 $\sqrt{2}$, 则电容电压与电容电流的有效值之间的关系为

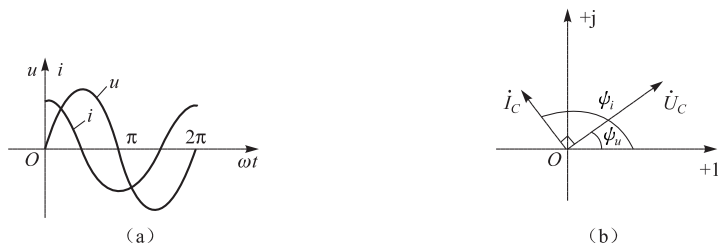


图 3-23 电容元件电压、电流波形和相量图

$$I = \omega C U = \frac{U}{X_C} \quad \text{或} \quad U = X_C I \quad (3-29)$$

这就表明了,在形式上电容电压与电容电流的有效值(或最大值)的关系式与欧姆定律相似。其中

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (3-30)$$

X_C 称为电抗或电容的电抗,简称容抗,它体现了电容对正弦电流的抵抗作用,单位为欧姆(Ω)。

从式(3-30)可以看出,容抗与电容和电源频率 f 成反比。 C 一定, f 越高,容抗越小,电容对电流的阻碍作用越小。在直流电路中, $f=0$,电容的容抗 $X_C \rightarrow \infty$,可视为电容开路,因此电容具有隔直通交的作用。

由式(3-26)得其相量表达式为

$$\begin{aligned} \dot{I} &= I \angle \left(\psi_u + \frac{\pi}{2} \right) = \omega C U \angle \psi_u \angle \frac{\pi}{2} \\ &= \omega C \dot{U} \angle \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

或

$$\dot{U} = \dot{I} \frac{1}{\omega C} \angle -\frac{\pi}{2}$$

所以

$$\dot{U} = -j X_C \dot{I} \quad (3-31)$$

上式即为电容元件伏安关系的相量形式。电容电路的相量模型如图 3-23(b)所示。

例 3-14 已知一电容 $C=50 \mu\text{F}$,接到 220 V、50 Hz 的正弦交流电源上。求:

- (1) X_C ;
- (2) 电路中的电流 I_C ;
- (3) 电源频率变为 1 000 Hz 时的容抗。

解 (1)
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 50 \times 10^{-6} \times 50} = 63.7 \Omega$$

(2)
$$I = \frac{U}{X_C} = \frac{220}{63.7} = 3.45 \text{ A}$$

(3) 当 $f=1\ 000\ \text{Hz}$ 时,有

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 1\ 000 \times 50 \times 10^{-6}} = 3.18\ \Omega$$

【思考题】

3-5 判断下列表达式的正(√)误(×)。(选定电感元件的电压与电流为关联参考方向)

$$(1) \quad u_L = \omega L I_L \quad U_L = \omega L I_L \quad u_L = \omega L i_L$$

$$(2) \quad I_C = \frac{U_C}{X_C} \quad i_C = \frac{U_C}{X_C} \quad \dot{i}_C = \frac{\dot{U}_C}{X_C} \quad i_C = \frac{u_C}{C}$$

3-6 已知 $u_L = 220\sqrt{2}\sin(1\ 000t + 30^\circ)\text{V}$, $L = 0.1\ \text{H}$ 。试求 X_L 和 I_L , 并绘出电压、电流相量图。

3.3 欧姆定律的相量形式、阻抗及导纳

3.3.1 复阻抗

如图 3-24 所示为一无源二端网络。把无源二端网络端口电压相量和端口电流相量的比值定义为该无源二端网络的复阻抗,简称阻抗,并用符号 Z (大写)表示。 Z 具有电阻的量纲(Ω),它是一个复数,不是正弦量的相量,故 Z 字母之上无小圆点“.”,其无源二端网络等效图如图 3-25 所示。其表达式为

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} \quad \text{或} \quad Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \angle \psi_u}{I \angle \psi_i} = \frac{U}{I} \angle (\psi_u - \psi_i) \quad (3-32)$$

上式也可以表示为

$$\dot{U}_m = Z \dot{I}_m \quad \text{或} \quad \dot{U} = Z \dot{I}$$

此式称为欧姆定律的相量形式。

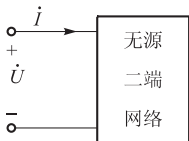


图 3-24 无源二端网络

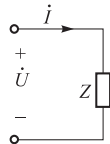


图 3-25 无源二端网络的阻抗

对于电阻、电感、电容元件,由式(3-19)、(3-25)、(3-31)可得它们的阻抗

$$\left. \begin{aligned} Z_R &= R \\ Z_L &= jX_L = j\omega L \\ Z_C &= -jX_C = -j\frac{1}{\omega C} \end{aligned} \right\} \quad (3-33)$$

3.3.2 阻抗模和阻抗角

1. 阻抗模

把无源二端网络端口电压的有效值和端口电流的有效值的比值定义为该无源二端网络的阻抗模,也为复阻抗的模,并用符号 $|Z|$ 表示。其表达式为

$$|Z| = \frac{U}{I} \quad (3-34)$$

2. 阻抗角

由式(3-32)得

$$Z = |Z| \angle (\psi_u - \psi_i) = |Z| \angle \varphi$$

式中 φ 称为阻抗角,它也表示二端网络的电压与电流的相位差。

【思考题】

3-7 已知负载电压 $\dot{U} = 100 \angle 0^\circ \text{V}$, 电流 $\dot{I} = 50 \angle 60^\circ \text{A}$, 求阻抗 Z 、阻抗模 $|Z|$, 并判断负载性质。

3.4 正弦交流电路分析

3.4.1 阻抗的串联电路

在正弦交流电路中, 阻抗的串联、并联和混联在联接形式上与直流电路一样, 其等效阻抗分析方法与直流电路等效电阻分析方法类似, 只是将实数的运算变为复数运算。

图3-26所示是两个阻抗 Z_1 和 Z_2 串联的电路。根据基尔霍夫定律, 则有

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = Z_1 \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 = (Z_1 + Z_2) \dot{I} \quad (3-35)$$

两个串联的阻抗可用一个等效阻抗 Z 来代替, 如图3-27所示。在相同电压 $\dot{U}$ 的作用下, 若这两电路中电流的有效值和相位保持不变, 则称 Z 为两个阻抗 Z_1 、 Z_2 串联的等效阻抗, 其等效阻抗等于两个串联的阻抗之和, 即

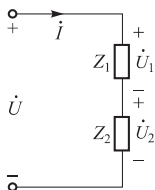


图3-26 阻抗串联电路

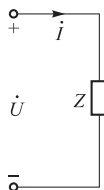


图3-27 阻抗串联电路的等效阻抗

$$Z = Z_1 + Z_2 \quad (3-36)$$

由以上分析可知, 若有 n 个阻抗串联, 等效阻抗等于各个阻抗之和。

如两个阻抗串联,则每个阻抗具有分压作用。仍可按分压原理来求串联支路中的电压 $\dot{U}_1$ 或 $\dot{U}_2$,其分压公式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{U} \\ \dot{U}_2 &= \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{U} \end{aligned} \right\} \quad (3-37)$$

3.4.2 阻抗的并联电路

图 3-28 所示是两个阻抗 Z_1 和 Z_2 并联的电路。根据基尔霍夫定律,则有

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_1} + \frac{\dot{U}}{Z_2} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{U} \quad (3-38)$$

两个并联的阻抗可用一个等效的阻抗 Z 来代替,如图 3-29 所示。

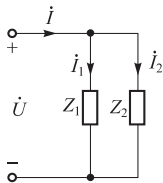


图 3-28 阻抗并联电路

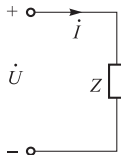


图 3-29 阻抗并联电路的等效阻抗

等效阻抗 Z

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (3-39)$$

对于由两个阻抗并联的交流电路,仍可按分流原理来求并联支路中的电流 $\dot{I}_1$ 或 $\dot{I}_2$,其分流公式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{I} \\ \dot{I}_2 &= \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{I} \end{aligned} \right\} \quad (3-40)$$

3.4.3 阻抗的串、并联电路

前面讨论的单一参数元件的电路是理想化的电路,而实际电路往往是多参数元件同时存在的,研究含有多参数元件的电路就更具有实际意义。下面就来讨论具有一定代表性的 RLC 串联电路。

电阻、电感、电容的串联电路,

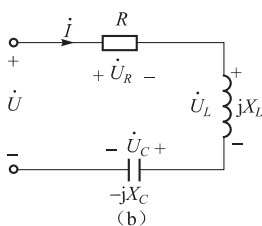
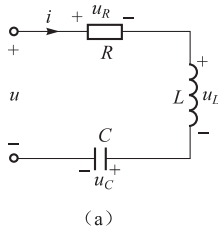


图 3-30 RLC 串联电路与相量模型图

它包含了三个不同的电路元件,是在实际工作中常常遇到的典型电路。如供电系统中的补偿电路和电子技术中常用的串联谐振电路都属于这种电路。图 3-30(a)所示为 RLC 串联正弦电路。

1. RLC 串联电路电压间的关系

由 KVL 可得

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

由于是串联电路,电流相同,则

$$\begin{aligned}\dot{U} &= R\dot{I} + jX_L\dot{I} - jX_C\dot{I} \\ &= [R + j(X_L - X_C)]\dot{I} \\ &= (R + jX)\dot{I} \\ &= Z\dot{I}\end{aligned}$$

其中 $X = X_L - X_C$ 称为等效电抗。

以电流相量为参考相量作出相量图,如图 3-31 所示。图中设 $U_L > U_C$ 。显然 $\dot{U}_R$ 、 $\dot{U}_X$ 、 $\dot{U}$ 组成一个直角三角形,称为电压三角形。由此可见,正弦电路端口电压的有效值不等于各串联元件的电压有效值之和。

由电压三角形可得

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{U_R^2 + U_X^2} = \sqrt{R^2 + X^2} I$$

上式整理后得

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{U}{|Z|} \quad (3-41)$$

$|Z|$ 表示电阻、电感和电容串联电路对交流电流的总的抵抗作用。阻抗的大小决定于电路参数 (R, L, C) 和电源频率,即

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (3-42)$$

2. RLC 串联电路阻抗

将图 3-31 所示的电压三角形的三边同时除以电流 I ,就得到电阻 R 、电抗 X 和阻抗模 $|Z|$ 组成的三角形——阻抗三角形,如图 3-32 所示。

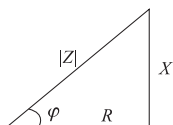


图 3-32 阻抗三角形

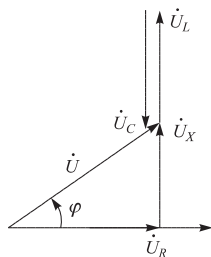


图 3-31 电压相量图

阻抗三角形和电压三角形是相似三角形,阻抗三角形中 $|Z|$ 与 R 的夹角 φ ,即阻抗角,它等于电压三角形中电压与电流的夹角 φ ,也就是电压与电流的相位差 φ ,即

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R} = \arctan \frac{U_X}{U_R} \quad (3-43)$$

或

$$\varphi = \psi_u - \psi_i \quad (3-44)$$

由阻抗三角形还可以得到阻抗模与电阻、等效电抗的关系式

$$\left. \begin{aligned} R &= |Z| \cos \varphi \\ X &= |Z| \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3-45)$$

当等效电抗不同时,电路呈现出以下三种不同的性质:

(1) 当 $X > 0$ 时,表明感抗大于容抗。由图 3-33(a)所示 $\varphi > 0$,此时电压相位超前于电流相位。电路呈现电感性。

(2) 当 $X < 0$ 时,表明容抗大于感抗。由图 3-33(b)所示 $\varphi < 0$,此时电流相位超前于电压相位。电路呈现电容性。

(3) 当 $X = 0$ 时,表明感抗和容抗的作用相等,即 $X_L = X_C$,电压与电流同相。由图 3-33(c)所示 $\varphi = 0$,此时电路如同纯电阻电路一样,这样的情况称为谐振。有关谐振问题将在后面讨论。

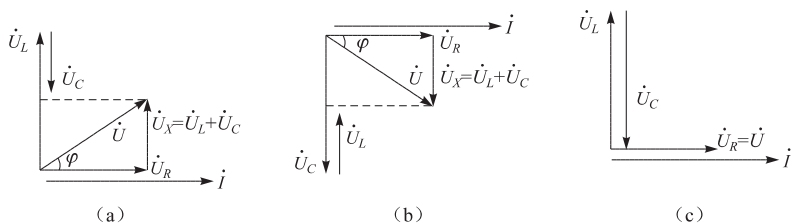


图 3-33 正弦交流电路的相量图

例 3-15 如图 3-34 所示电路,电流表 A_1 、 A_2 的读数均为 10 A,求电流表 A 的读数。

解 由 KCL 有

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

作相量图如图 3-35 所示,由相量图得

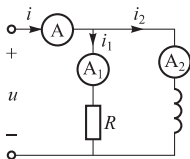


图 3-34 例 3-15 图

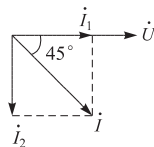


图 3-35 例 3-15 相量图

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{I_1^2 + I_2^2} \\ &= \sqrt{10^2 + 10^2} \\ &= 10\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$=14.1 \text{ A}$$

例 3-16 已知 RLC 串联电路中 $u=220\sqrt{2}\sin(314t+30^\circ)\text{V}$, $R=30\ \Omega$, $L=254\text{ mH}$, $C=80\ \mu\text{F}$, 计算:

- (1) 感抗、容抗;
- (2) 电流有效值 I 及瞬时值 i 。

解 (1) 感抗 $X_L=\omega L=314\times 254\times 10^{-3}\approx 80\ \Omega$

容抗
$$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{314\times 80\times 10^{-6}}\approx 40\ \Omega$$

(2) 电流有效值

$$I=\frac{U}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}}=\frac{220}{\sqrt{30^2+(80-40)^2}}=4.4\text{ A}$$

$$\varphi=\arctan\frac{X_L-X_C}{R}=\arctan\frac{80-40}{30}=53.1^\circ$$

因为 $\varphi=\psi_u-\psi_i$ 所以 $\psi_i=\psi_u-\varphi=30^\circ-53.1^\circ=-23.1^\circ$

电流的瞬时值表达式 $i=4.4\sqrt{2}\sin(314t-23.1^\circ)\text{A}$

3.4.4 相量分析法的一般解题步骤

将正弦交流电路中的电压、电流用相量表示,元件参数用复阻抗来代替。运用基尔霍夫定律的相量形式和元件欧姆定律的相量形式来求解正弦交流电路的方法称为相量法。

相量分析法的一般解题步骤为:

- (1) 根据原电路图画出相量模型图(电路结构不变)

$$R\rightarrow R, L\rightarrow jX_L, C\rightarrow -jX_C, u\rightarrow \dot{U}, i\rightarrow \dot{I}$$

(2) 对相量模型图应用 KCL、KVL 的相量形式,列写电路的相量代数方程,并求解(或用相量图求解)。

- (3) 将结果变换成要求的形式。

运用相量法分析正弦交流电路时,直流电路中的结论、定理和分析方法同样适用于正弦交流电路。本书主要介绍以相量图为依据,用有效值来计算。

例 3-17 设在图 3-26 所示的两阻抗串联电路中, $Z_1=3+j3\ \Omega$, $Z_2=6.92-j4\ \Omega$, 电源电压 $u=100\sqrt{2}\sin(\omega t+30^\circ)\text{V}$, 求

- (1) 等效阻抗 Z ;
- (2) 电流 I 和电压 U_1 、 U_2 。

解 (1) 等效的阻抗 Z

$$Z=Z_1+Z_2=3+j3+6.92-j4=9.92-j=10\angle-6^\circ\ \Omega$$

或
$$|Z|=\sqrt{(3+6.92)^2+(3-4)^2}=10\ \Omega$$

故

$$\varphi = \arctan \frac{(3-4)}{(3+6.92)} = -6^\circ$$

$$Z = 10 \angle -6^\circ \Omega$$

(2) 方法一 相量法

由题设电源电压相量

$$\dot{U} = 100 \angle 30^\circ \text{ V}$$

电流相量

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{100 \angle 30^\circ}{10 \angle -6^\circ} = 10 \angle 36^\circ \text{ A}$$

电压相量

$$\dot{U}_1 = Z_1 \dot{I} = 3\sqrt{2} \angle 45^\circ \times 10 \angle 36^\circ = 30\sqrt{2} \angle 81^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_2 = Z_2 \dot{I} = 8 \angle -30^\circ \times 10 \angle 36^\circ = 80 \angle 6^\circ \text{ V}$$

电压的瞬时值

$$u_1 = 60 \sin(\omega t + 81^\circ) \text{ V}$$

$$u_2 = 80 \sqrt{2} \sin(\omega t + 6^\circ) \text{ V}$$

电流的瞬时值

$$i = 10 \sqrt{2} \sin(\omega t + 36^\circ) \text{ A}$$

方法二 用有效值计算

电流有效值

$$I = \frac{U}{|Z|} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A}$$

相位差

$$\varphi = \arctan \frac{U_X}{U_R} = -6^\circ$$

电流初相角

$$\psi_i = \psi_u - \varphi = 30^\circ - (-6^\circ) = 36^\circ$$

电流的瞬时值

$$i = 10 \sqrt{2} \sin(\omega t + 36^\circ) \text{ A}$$

电压有效值

$$U_1 = |Z_1| I = 3\sqrt{2} \times 10 = 30\sqrt{2} \text{ V}$$

$$U_2 = |Z_2| I = 8 \times 10 = 80 \text{ V}$$

阻抗角

$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{3}{3}\right) = 45^\circ$$

$$\varphi_2 = \arctan\left(\frac{-4}{6.92}\right) = -30^\circ$$

电压初相角

$$\psi_{u1} = \varphi_1 + \psi_{i1} = 36^\circ + 45^\circ = 81^\circ$$

$$\psi_{u2} = \varphi_2 + \psi_{i2} = 36^\circ - 30^\circ = 6^\circ$$

电压的瞬时值

$$u_1 = 60 \sin(\omega t + 81^\circ) \text{ V}$$

$$u_2 = 80 \sqrt{2} \sin(\omega t + 6^\circ) \text{ V}$$

【思考题】

3-8 试判断下列表达式的正(√)误(×),如图3-31所示。

$$(1) U = U_R + U_L + U_C$$

$$(2) U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{U_R^2 + U_X^2}$$

$$(3) \dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

$$(4) Z = R + X_L - X_C$$

3-9 图 3-36 所示为 RC 串联电路, 已知 $R=10\Omega$, $\dot{U}_0$ 超前于 $\dot{U}_i 30^\circ$, 求 X_C 。

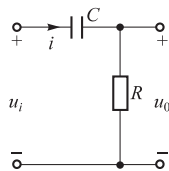


图 3-36 思考 3-9 图

3-10 如图 3-37 所示的四个电路下的电压、电流和电路阻抗模的答案对不对?

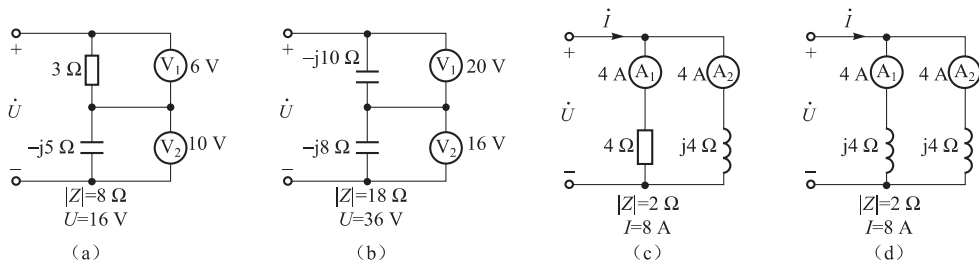


图 3-37 思考 3-10 图

3.5 正弦交流电路的功率及功率因素提高

3.5.1 正弦交流电路的功率

1. 瞬时功率

图 3-38 所示为一无源二端口网络, 在图示参考方向下, 输入该二端口网络的瞬时功率 p 为

$$p = ui$$

图 3-38 无源二端口网络

设电流

$$i = \sqrt{2}I \sin \omega t$$

电压

$$u = \sqrt{2}U \sin (\omega t - \varphi)$$

则

$$\begin{aligned} p &= ui = \sqrt{2}U \sin (\omega t - \varphi) \sqrt{2}I \sin \omega t \\ &= UI [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)] \end{aligned} \quad (3-46)$$

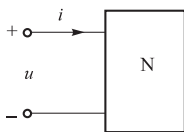
当二端口网络分别为 R 、 L 、 C 元件时, 根据式 (3-46) 可得到这些元件吸收的瞬时功率为

$$\text{电阻 } R \quad \varphi = 0, \quad p_R = U_R I_R (1 - \cos 2\omega t) \geqslant 0$$

$$\text{电感 } L \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad p_L = U_L I_L \sin 2\omega t$$

$$\text{电容 } C \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad p_C = -U_C I_C \sin 2\omega t$$

可见, $p_R \geqslant 0$, 表明了电阻的耗能特性; p_L 和 p_C 可正可负, 表明了电感和电容的储能特性,



它们在电路中周期性地吸收和发出功率,与外电路交换电磁场能量。

2. 平均功率(有功功率) P

由于瞬时功率是随时间变化,测量和计算都不方便,所以在实际工作中常用平均功率。瞬时功率在一个周期内的平均值称为平均功率(有功功率),用大写字母 P 表示。

则

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \int_0^T ui dt = UI \cos \varphi = UI \lambda \quad (3-47)$$

可以看出,正弦交流电路的有功功率不但与电压、电流的有效值有关,还与电压与电流相位差的余弦有关。我们把 $\lambda = \cos \varphi$ 称为电路的功率因数。故阻抗角 φ 也称为功率因数角。

$$\text{对电阻 } R \quad \varphi=0, \quad P_R=U_R I_R=I_R^2 R \geq 0$$

$$\text{对电感 } L \quad \varphi=\frac{\pi}{2}, \quad P_L=U_L I_L \cos \frac{\pi}{2}=0$$

$$\text{对电容 } C \quad \varphi=-\frac{\pi}{2}, \quad P_C=U_C I_C \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

可见,在正弦交流电路中,电感、电容元件就平均意义而言,不消耗电能,所以有功功率为零,而电阻总是消耗电能。当电路中有多个电阻时,其总有功功率为各电阻的有功功率之和,即

$$P=P_{R1}+P_{R2}+P_{R3}+\cdots$$

3. 无功功率

工程中为了表示储能元件能量交换的强弱,引入了用无功功率 Q ,并定义

$$Q=UI \sin \varphi \quad (3-48)$$

它具有功率的量纲,但为了与电阻上消耗的有功功率相区别,无功功率的基本单位为乏尔,简称乏(var)。无功功率体现了储能元件能量交换的最大速率。

$$\text{对电阻 } R \quad \varphi=0, \quad Q_R=U_R I_R \sin 0^\circ=0$$

$$\text{对电感 } L \quad \varphi=\frac{\pi}{2}, \quad Q_L=U_L I_L \sin \frac{\pi}{2}=U_L I_L > 0$$

$$\text{对电容 } C \quad \varphi=-\frac{\pi}{2}, \quad Q_C=U_C I_C \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right)=-U_C I_C < 0$$

可见,在正弦交流电路中,电阻元件的无功功率为零。电容性无功功率取负值,而电感性无功功率取正值,也即它们的无功功率相互补偿一部分,不足的再与外电路进行交换。可以证明,电路的无功功率

$$Q=Q_L-Q_C$$

上式中 Q_L 为电路中全部电感元件无功功率之和, Q_C 为电路中全部电容元件无功功率之和。

4. 视在功率

在交流电路中,我们将正弦交流电路中电压有效值与电流有效值的乘积称为视在功率,即

$$S=UI \quad (3-49)$$

视在功率通常用来表示电源设备的容量。例如,交流发电机、变压器等额定电压 U_N 和额定电流 I_N 的乘积称为额定视在功率 S_N ,即

$$S_N=U_N I_N \quad (3-50)$$

S_N 又称为额定容量,简称容量。它表示电源设备能够提供的最大有功功率,但负载能否得到这样大的有功功率,还在于负载的性质。

视在功率的单位是伏·安(VA)或千伏·安(kVA)

5. 有功功率、无功功率、视在功率之间的关系

下面以 RLC 串联电路来讨论。

将前面介绍的电压三角形的三边同时乘以电流 I ,就得到有功功率、无功功率、视在功率组成的三角形——功率三角形,如图 3-39 所示。

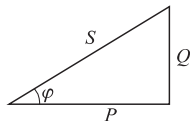


图 3-39 功率三角形

从功率三角形可看出

$$\left. \begin{aligned} P &= UI \cos \varphi = S \cos \varphi \\ Q &= UI \sin \varphi = S \sin \varphi \\ S &= \sqrt{P^2 + Q^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{Q}{P} \end{aligned} \right\} \quad (3-51)$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} \quad (3-52)$$

式(3-52)表明,当视在功率一定时,在功率因数越大的电路中,用电设备的有功功率也越大,电源输出功率的利用率就越高。功率因数的大小由电路参数(R 、 L 、 C)和电源频率决定。工厂中的交流电机、变压器等都是感性负载,功率因数一般较低。

例 3-18 见例 3-16 的已知,计算 P 、 Q 和 S 。

解 由题例 3-16 得到

$$X_L = \omega L = 314 \times 254 \times 10^{-3} \approx 80 \, \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \times 80 \times 10^{-6}} \approx 40 \, \Omega$$

$$I = 4.4 \, \text{A} \quad \varphi = 53.1^\circ$$

视在功率

$$S = UI = 220 \times 4.4 = 968 \, \text{VA}$$

有功功率

$$P = UI \cos \varphi = 220 \times 4.4 \cos 53.1^\circ = 581 \, \text{W}$$

无功功率

$$Q = UI \sin \varphi = 220 \times 4.4 \sin 53.1^\circ = 774 \, \text{var}$$

3.5.2 功率因数提高

功率因数是电力系统很重要的经济指标。下面主要介绍提高功率因数的意义和方法。

1. 提高功率因数的意义

在交流电路中,一般负载多为电感性负载。例如,常用的交流感应电动机、日光灯等,通常它们的功率因数都比较低。交流感应电动机在额定负载时,功率因数约为 $0.8 \sim 0.85$;轻载时只有 $0.4 \sim 0.5$;空载时更低,仅为 $0.2 \sim 0.3$;不装电容器的日光灯的功率因数为 $0.45 \sim 0.60$ 。故在实际中,需要提高功率因数。这是因为:

(1) 提高功率因数可以提高发、配电设备的利用率。例如,一台额定容量为 10 kVA 的变压器,若在额定电压、额定电流下运行,当负载的 $\cos \varphi = 1$ 时,它传输的有功功率为 10 kW ,得到了充分的利用。负载的 $\cos \varphi$ 为 0.8 或 0.6 时,传输的有功功率分别是 8 kW 和 6 kW ,变压器没有得到充分的利用。

(2) 减少输电线路的电压降和功率损失。在电源输出电压和负载的有功功率一定时,输电线的电流

$$I = \frac{P}{U\lambda} = \frac{P}{U \cos \varphi} \quad (3-53)$$

由此可见,负载的 $\lambda (\cos \varphi)$ 越小,输电线的电流越大,输电线的能量损耗就越大。

综上所述,为提高电源设备的利用率,减小线路压降及功率损耗,应设法提高功率因数。

2. 提高功率因数的方法

一般可以从两方面来考虑提高功率因数。一方面是提高自然功率因数。主要办法有改进电动机的运行条件,合理选择电动机的容量,或采用同步电动机等措施。另一方面是采用人工补偿,也叫无功补偿。就是在通常广泛应用的电感性电路中,人为地并联电容性负载。感性负载并联电容器后,它们之间相互补偿,进行一部分能量交换,减少了电源和负载间的能量交换,从而提高了功率因数。

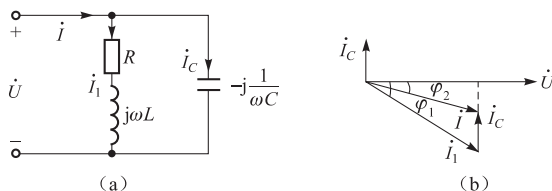


图 3-40 功率因数提高电路

图 3-40(a)给出了一个电感性负载并联电容时的电路图,图 3-40(b)是它的相量图。

从相量图可以看出一个电感性负载并联电容后,总电压与总电流的相位差 φ_2 比没有并联电容前的相位差 φ_1 要小。故 $\cos \varphi_2$ 比 $\cos \varphi_1$ 大,提高了功率因数。

应该注意:上面的结论是在一定条件下成立。所谓提高功率因数,并不是提高电感性负载本身的功率因数。负载在并联电容前后,由于两端电压没变,其工作状态不受影响,负载本身的电流、有功功率和功率因数均无变化。提高功率因数只是提高了电路总的功率因数。

用并联电容来提高功率因数,一般补偿到 0.9 左右。

并电容前后电路的有功功率不变,因此,由图 3-40(b)所示的相量图可得

$$I_C = I_1 \sin \varphi_1 - I \sin \varphi_2$$

因为

$$P = UI_1 \cos \varphi_1$$

$$P = UI \cos \varphi_2$$

$$I_C = \frac{U}{X_C} = \omega C U$$

所以

$$C = \frac{P(\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2)}{\omega U^2} \quad (3-54)$$

例 3-19 一台功率为 1.1 kW 的感应电动机,接在 220 V、50 Hz 的电路中,电动机需要的电流为 10 A。求:(1) 电动机的功率因数;(2) 若在电动机两端并联一个 $79.5 \mu\text{F}$ 的电容器,电路的功率因数为多少?

解 (1)
$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{1.1 \times 1000}{220 \times 10} = 0.5$$

(2) 在未并联电容前(图 3-41 实线部分),电路中的电流为 $\dot{I}_1$ 。并联电容后,电动机中的电流不变,仍为 $\dot{I}_1$,这时电路中的电流为

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_C$$

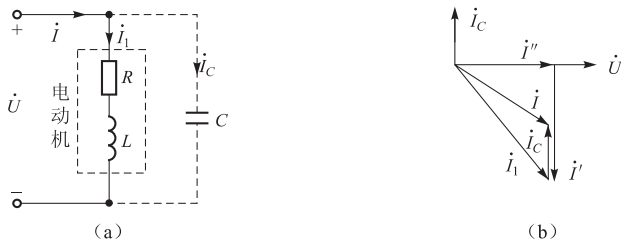


图 3-41 例 3-19 图

由图 3-41(b)相量图得

$$I_C = \frac{U}{X_C} = \omega C U = 314 \times 79.5 \times 10^{-6} \times 220 = 5.5 \text{ A}$$

$$I' = I \sin 60^\circ = 10 \sin 60^\circ = 8.66 \text{ A}$$

$$I'' = I \cos 60^\circ = 5 \text{ A}$$

$$\varphi' = \arctan \frac{I' - I_C}{I''} = \arctan \frac{8.66 - 5.5}{5} = 32.3^\circ$$

$$\cos \varphi' = \cos 32.3^\circ = 0.844$$

【思考题】

3-11 为什么不用串联电容器的方法提高功率因数?

3-12 人工补偿时,并联电容器是不是越大越好?

3-13 一台 250 kVA 的变压器,带功率因数 $\cos \varphi = 0.8 (\varphi > 0)$ 的负载满载运行,若负载端并联补偿电容,功率因数提高到 0.9。

(1) 求补偿的无功功率 Q_C ;

(2) 此变压器还能外接多少千瓦的电阻性负载?

* 3.6 交流电路中的谐振

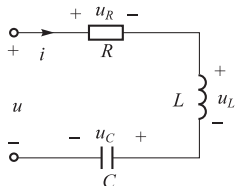
3.6.1 串联谐振

1. 谐振现象

由电阻、电感、电容组成的电路,如图 3-42 所示,在正弦电源作用下,当电压与电流同相时,电路呈电阻性,此时电路的工作状态称为谐振。

2. 产生谐振的条件

图 3-42 中,电路的总阻抗为

$$Z = R + j(X_L - X_C)$$


由谐振概念可知,串联谐振的条件是

$$\left. \begin{aligned} X_L - X_C &= 0 & \text{或} & & X_L &= X_C \\ \omega_0 L &= \frac{1}{\omega_0 C} \end{aligned} \right\} \quad (3-55)$$

可见,调节 ω 、 L 和 C 三个参数中的任意一个,都可使电路发生谐振。式中 ω_0 称为谐振角频率,从上式中可解出

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{或} \quad f = f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad (3-56)$$

串联电路中的谐振频率 f_0 与电阻 R 和电源无关。它反映了串联电路的一种固有的性质,所以又称“固有频率”; ω_0 称为“固有角频率”。

3. 调谐方法

调谐过程就是使电源的频率和电路的固有频率二者由不相等达到相等的过程。其方法有

(1) 调频:当 L 、 C 固定时,可以改变电源频率达到谐振。

(2) 调谐:当电源的频率 f 一定时,可改变电容 C 和电感 L 使电路谐振。收音机选台就是这样一个典型例子。波段开关用来调节 L 值,调台的旋钮用来改变可变电容器 C 的值,以使 $f = f_0$ 。

4. 电路串联谐振时的特点

(1) 谐振时,总阻抗最小($Z = R$),当外加电压 U 一定时,电流具有最大值 $I_0 = \frac{U}{R}$, I_0 称为

串联谐振电流。

(2) 电压与电流同相,电路呈现纯电阻性质。

(3) 因为 $(X_L=X_C)\gg R$,故 $(U_L=U_C)\gg U_R=U$,即电感和电容上的电压远远高于电路的端电压。串联谐振时电感电压与电容电压大小相等,相位相反,互相抵消,因此串联谐振又称为电压谐振。

(4) 特性阻抗。谐振时,电路的等效电抗为零,但是感抗和容抗都不为零,此时电路的感抗或容抗都叫做谐振电路的特性阻抗,用字母 ρ 表示

$$\rho=\omega_0 L=\frac{1}{\omega_0 C}=\frac{L}{\sqrt{LC}}=\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3-57)$$

(5) 品质因数。在电子技术中,经常用谐振电路的特性阻抗与电路中电阻的比值来说明电路的性能,这个比值被称做电路的品质因数,用字母 Q 表示

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \\ Q &= \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} \end{aligned} \right\} \quad (3-58)$$

从式(3-58)可知,谐振时,电阻上的电压等于电源电压。电感和电容上的电压等于电源电压的 Q 倍。在电子工程中, Q 值一般在 $10\sim 500$ 之间。当 $Q\gg 1$ 时,就有 $U_L=U_C\gg U$,即 U_L 、 U_C 都远远大于电源电压。串联谐振时若在线圈或电容上产生高电压则会造成绝缘的击穿,所以在电力电路中,是要设法避免发生串联谐振。然而在电子电路中却常常利用串联谐振。

例 3-20 在 RLC 串联电路中,已知 $R=10\ \Omega$, $L=0.26\ \text{mH}$, $C=238\ \text{pF}$ 。

(1) 求谐振频率 f_0 ;

(2) 若信号电压 $U=10\ \mu\text{V}$,求电路中的电流及电感的端电压 U_L 。

解 (1) 谐振频率

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.26\times 10^{-3}\times 238\times 10^{-12}}} = 640\ \text{kHz}$$

(2) 当信号电压为 $10\ \mu\text{V}$ 时,电流

$$I=I_0=\frac{U}{R}=\frac{10}{10}=1\ \mu\text{A}$$

电感端电压

$$U_L=U_C=QU=105\times 10=1\ 050\ \mu\text{V}=1.05\ \text{mV}$$

3.6.2 并联谐振

串联谐振电路适用于内阻抗小的信号源。如果信号源的内阻抗很大,仍用串联谐振电路,将使电路的品质因数严重降低,选择性变差。因此,应采用并联谐振电路。

并联谐振电路的形式较多。工程上也常用到电感线圈与电容并联的谐振电路。如图3-43所示,其中电感线圈用 R 和 L 的串联组合来表示。

1. 谐振现象

同串联谐振一样,当端电压 $\dot{U}$ 和总电流 $\dot{I}$ 同相时,电路的这一工作状态称为并联谐振。

2. 并联谐振的条件

理论和实验证明,电感线圈与电容并联谐振电路的谐振频率为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}} \quad (3-59)$$

在一般情况下,线圈的电阻比较小, $\sqrt{\frac{L}{C}} \gg R$, 则 $\frac{CR^2}{L} \approx 0$, 所以谐振频率近似为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

这个公式与串联谐振频率公式相同。在实际电路中,如果电阻的损耗较小,应用此公式计算出的结果,误差是很小的。

3. 并联谐振时的特点

(1) 电路显电阻性,由于 R 很小,因此,总阻抗很大, $|Z_0| = \frac{L}{CR} = Q\rho$;

(2) 总电压与总电流同相;

(3) 品质因数 $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$;

(4) 支路电流可能远远大于端口电流,支路电流是总电流的 Q 倍,即

$$I_L = QI \quad I_C = QI$$

电感和电容上的电流大小相等,相位相反,且为电源电流的 Q 倍。因此,并联谐振又叫做电流谐振。

当外加电源的频率等于并联电路的固有频率时,可以获得较大的信号电压。当外加电源的频率偏离并联电路的固有频率时,可以获得较小的信号电压。因此,并联谐振电路常常用作选频器,收音机和电视机的中频选频电路就是并联谐振电路。

例 3-21 在图 3-42 中,已知 $L=500\ \mu\text{H}$, $C=234\ \text{pF}$, $R=20\ \Omega$ 。(1) 求 f_0 ; (2) 设 $I=1\ \mu\text{A}$, 求谐振时的 I_C 。

解 (1) $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2 \times 3.14 \sqrt{500 \times 10^{-6} \times 234 \times 10^{-12}}} = 465\ \text{kHz}$

(2) $X_L = 2\pi f_0 L = 2\pi \times 465 \times 10^3 \times 500 \times 10^{-6} = 1\ 460\ \Omega$

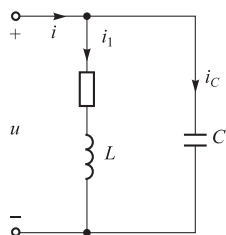


图 3-43 正弦交流电
并联电路